

15. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE – WITAMY LITERKI

Wyrażenie arytmetyczne to **liczby** połączone znakami działań,
np. $3+27 : 5$ lub $459 - 121 + 15 : 3$

Wyrażenie algebraiczne to **liczby wraz z literami** połączone znakami działań, np. $3 - 8x - 10x$, $5a + 3b - 7a$, $5x : 20x$, itp.

Nazwy wyrażeń algebraicznych zapisujemy według znaku działania, które je łączy.

NAJWAŻNIEJSZE NAZWY WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH

$x + y$	suma liczb x i y
$x - y$	różnica liczb x i y
$x \cdot y = xy$	iloczyn liczb x i y
$x : y = \frac{x}{y}$	iloraz liczb x i y
$2 \cdot x = 2x$	podwojona liczba x lub iloczyn liczby 2 i x
$3 \cdot x = 3x$	potrojona liczba x lub iloczyn liczby 3 i x
$4 \cdot x = 4x$	czterokrotność liczby x lub iloczyn liczby 4 i x
$5 \cdot x = 5x$	pięciokrotność liczby x lub iloczyn liczby 5 i x
$\frac{1}{2}x = \frac{x}{2}$	połowa liczby x lub iloraz x i 2
$\frac{1}{3}x = \frac{x}{3}$	trzecia część liczby x lub iloraz x i 3
$12\% x = 0,12x$	dwanaście procent liczby x
x^2	kwadrat liczby x
x^3	sześcian liczby x lub trzecia potęga liczby x
$(x + y)^2$	kwadrat sumy liczb x i y
$x^2 - y^2$	różnica kwadratów liczb x i y
$x^3 - y^3$	różnica sześciątów liczb x i y

ZADANIE 21. Mając wyrażenie napisane symbolicznie, nazwiemy słowami co ono oznacza. Zaczynasz zawsze od wewnętrznego działania:

- a) $2a + 2b$ **suma** podwojonej liczby a i podwojonej liczby b ;
- b) $3a - 4b$ **różnica** potrojonej liczby a i czterokrotności liczby b ;
- c) $\frac{1}{2}x : \frac{1}{5}y$ **iloraz** połowy liczby x i piątej części liczby y ;
- d) $x^7 + y^5$ **suma** siódmej potęgi liczby x i piątej potęgi liczby y ;
- e) $\frac{a-b}{2}$ **iloraz** różnicy liczb a i b przez 2;
- f) $\frac{a+b}{a-b}$ **iloraz** sumy liczb a i b przez różnicę a i b .

Z wyrażeniami algebraicznymi spotkasz się w szkole podstawowej i nie rozstaniesz aż do matury. Będziesz obliczać ich wartość dla liczb ukrytych pod literami, będziesz wyrażenia algebraiczne dodawać: $2a + 5a$, odejmować: $9x - 5x - 24x - 16x$, mnożyć: $45x \cdot 36x$, dzielić: $\frac{24abx}{32acx^2}$, potęgować: $(-3xyz)^2$ i pierwiastkować: $\sqrt{9x}$.

Stopień trudności będzie coraz wyższy. Matematyka obejmuje bezmiar przeciekawych zadań więc Twoje lekcje będą urozmaicone.

ZADANIE 22. Obliczymy jaka jest wartość wyrażenia $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

$$\text{dla } x = 2 \text{ i } y = 7.$$

Należy podstawić do wyrażenia liczbę 2 za x i 7 za y . Otrzymamy:

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{2}{7} - \frac{7}{2} = \frac{4}{14} - \frac{49}{14} = -\frac{45}{14} = -3\frac{3}{14}$$

Odp. Wartość wyrażenia $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ dla liczb $x = 2$ i $y = 7$ wynosi $(-3\frac{3}{14})$.

Komentarz:

Warto pisać odpowiedź do zadania. Jest ona podsumowaniem dla Twoich obliczeń i odpowiada na postawione w treści pytanie. Potem powtarzając materiał przeczytasz ją i skojarzy Ci się, o czym było zadanie.

Praca domowa:

1. Zapisz wyrażenie algebraiczne określone słowną nazwą:

- suma liczby d i potrojonej liczby b ,
- suma liczby x i połowy liczby z ,
- różnica liczby y i trzeciej części liczby x ,
- różnica liczb 1000 i x ,
- iloczyn liczb $4a$ i $6b$,
- iloczyn liczby $(a + b)$ przez liczbę $(a + c)$,
- iloraz liczby x przez kwadrat liczby y ,
- iloraz sumy liczb a i b przez różnicę liczb c i d .

2. Zapisz słownie wyrażenia algebraiczne:

- $\frac{3}{a+b}$
- $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y$
- $5x + 4y$
- $\frac{\frac{1}{2}x}{4y}$

3. Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego:

a) $7+x^2+y^3$ dla $x = \frac{3}{4}$ $y = -\frac{1}{5}$

b) $x \cdot y \cdot z + 6$ dla $x = \frac{1}{3}$ $y = \frac{2}{5}$ $z = \frac{7}{9}$

c) $(x + y)^2$ dla $x = \frac{1}{2}$ $y = \frac{3}{5}$

Odpowiedzi:

1. a) $d + 3b$ c) $y - \frac{1}{3}x$ e) $4a \cdot 6b$ g) $\frac{x}{y^2}$

b) $x + \frac{1}{2}z$ d) $1000 - x$ f) $(a + b) \cdot (a + c)$ h) $\frac{a+b}{c-d}$

2. a) $\frac{3}{a+b}$ iloraz liczby 3 i sumy liczb a i b

b) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y$ różnica trzeciej części liczby x i połowy liczby y

c) $5x + 4y$ suma pięciokrotności liczby x i czterokrotności liczby y

d) $\frac{\frac{1}{2}x}{4y}$ iloraz połowy liczby x i czterokrotności liczby y

3. Wartość wyrażenia wynosi: a) $7\frac{1109}{2000}$ b) $6\frac{14}{135}$ c) $1\frac{21}{100}$

DZIAŁANIA NA WYRAŻENIACH ALGEBRAICZNYCH

Wyrażenia, które mają tę samą literę, ale różnią się liczbą, nazywamy **wyrazami podobnymi**. Wyrazami podobnymi są:

a) $-4x, +7x, -245x, -31x$;

b) $-mn, -54mn, 23mn, -179mn$;

c) $+4x^2, -12,4x^2, -6\frac{7}{19}x^2$;

d) $-3xy, -5yx, +2xy$; **xy oznacza to samo, co yx**

Wyrazami podobnymi nie są:

a) $-7xy, +2x^2y, -5xy^2$, zmienne x i y występują w innych potęgach;

b) $+5mn, -5m, -4n, 10m^2$;

c) $61\frac{x}{y}; 61\frac{y}{x}$;

DODAWANIE I ODEJMOWANIE

Dodawanie i odejmowanie wyrażen algebraicznych wykonujemy na **wyrazach podobnych**. Różnią się one tylko liczbą, a litera bądź litery są w tych liczbach takie same, np. $34x - 40x + 25x$.

Wykonujemy działania tylko na liczbach, a literę (litery) do wyniku dopisujemy. Takie zmniejszanie ilości składników, nazywamy **redukcją wyrazów podobnych**.

ZADANIE 23. Wykonamy następujące działania:

a) $\underline{-2a} + 4b \underline{-5a} = -7a + 4b$ redukujemy tylko liczby z przyłączoną do nich literą „a”. Mamy dwa długi więc: $\boxed{-2} \boxed{-5} = -7$

Dla składnika $(+4b)$ nie mamy odpowiednika, więc go spisujemy.

b) $\frac{1}{3}x + \underline{\frac{2}{5}y} + \underline{\frac{1}{3}y} = \frac{1}{3}x + \frac{11}{15}y$ w tym przykładzie składnik $\frac{1}{3}x$ poczeka

a my ułamki $\frac{2}{5}$ i $\frac{1}{3}$ sprowadzimy do wspólnego mianownika i dodamy.

To pomocnicze obliczenie wykonuj sobie gdzieś obok w zeszycie. Dodajesz ułamki nie myśląc na razie o literze **y**, a potem do powyższego działania wpiszesz wynik i dołączysz mu literkę.

Takie z boku obliczanie usprawnia pracę: $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$

Podczas redukowania uważaj na minus przed nawiasem.

Minus przed nawiasem to bomba zegarowa. Uczniowie często nie zwracają uwagi na tę kruszynę czającą się przed nawiasem, a ona może nieźle narozrabiać i doprowadzić swoją obecnością do całkiem innego wyniku. Zapamiętaj tę zasadę: **jeśli przed nawiasem stoi minus, to opuszczając nawias zmien wszystkim liczbom znaki na przeciwne, np.**

$$\begin{aligned} 7x - (5x + 2 - 6y + 4z) &= \\ = 7x - 5x - 2 + 6y - 4z &\text{ teraz redukujesz wyrazy podobne;} \\ = 2x + 6y - 4z - 2 &\text{ możesz ułożyć wynik alfabetycznie.} \end{aligned}$$

MNOŻENIE WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH

Oddzielnie mnożysz liczby i oddzielnie litery. Jeśli liczby mają przy sobie całkiem inne litery, to je obok siebie w wyniku spisujesz. Te same litery zapisujesz w postaci potęgi.

ZADANIE 24. Wykonamy następujące mnożenia:

a) $5y \cdot x = 5yx = 5xy$ litery zapisujesz alfabetycznie;

b) $1 \cdot x \cdot a = 1ax = ax$ c) $-1 \cdot x = -x$ d) $-4x \cdot (-3a) = 12ax$

Jeśli są te same litery, to policz je i zapisz ilość w wykładniku potęgi:

e) $-x \cdot x \cdot (-x) = x^3$ f) $6x \cdot 4x = 24x^2$ g) $-3x \cdot 5x = -15x^2$

Tu zastosujesz prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania:

h) $x \cdot (4 + x) = \underline{x \cdot 4} + \underline{x \cdot x} = 4x + x^2$

i) $(x + y) \cdot (2 + x)$ wymnażamy każdy czynnik z każdym i otrzymamy

$$= \underline{x \cdot 2} + \underline{x \cdot x} + \underline{y \cdot 2} + \underline{y \cdot x} = 2x + x^2 + 2y + xy$$

j) $(x + y)(2 - x)(x - 5)$ najpierw wymnożymy dwa pierwsze nawiasy;

$$= (2x - x^2 + 2y - xy) \cdot (x - 5) \text{ teraz pierwszy nawias przez drugi;}$$

$$= 2x^2 - 10x - x^3 + 5x^2 + 2xy - 10y - x^2y + 5xy \text{ redukujemy;}$$

$$= 7x^2 - 10x - x^3 + 7xy - 10y - x^2y$$

DZIELENIE WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH

Dzielenie wyrażeń algebraicznych polega najczęściej na skracaniu licznika z mianownikiem. Oto przykłady:

a) $\frac{7x}{7} = x$ licznik i mianownik skróciliśmy przez 7.

b) $(6x^2 + ax) : x = \frac{6x^2}{x} + \frac{ax}{x} = 6x + a$ każdy ze składników nawiasu zapisaliśmy w postaci ułamka, a potem skróciliśmy je przez x .

c) $\frac{10a-15x}{25y} = \frac{2a-3x}{5y}$ możesz skrócić składniki całego ułamka przez 5 ale pamiętaj, że można tak zrobić tylko wtedy, **gdy każdy składnik jest podzielny przez 5**.

d) $\frac{18c+27k}{45m} = \frac{2c+3k}{5m}$ każdy składnik skróciliśmy przez 9.

Można liczyć dłuższą drogą; wtedy wyłączasz wspólny czynnik 9 przed nawias w liczniku i w mianowniku, a potem go skracasz:

$$\frac{18c+27k}{45m} = \frac{\cancel{9} \cdot (2c+3k)}{\cancel{9} \cdot (5m)} = \frac{2c+3k}{5m}$$

POTĘGOWANIE

Jeśli w nawiasie jest ujemna liczba, to wykładnik potęgi odnosi się do minusa i do liczby:

$$(-5)^2 = +25 = 25$$

Gdy liczba ujemna nie jest w nawiasie, to wykładnik odnosi się tylko do liczby ale nie do minusa. Dla wykładnika potęgi liczy się wtedy tylko „najbliższe towarzystwo”:

$$-5^2 = -25 \text{ wykładnik „czyta” to tak: } -(5)^2 = -25$$

Teraz wykładnik potęgi odnosi się do znaku ułamka, oraz do jego licznika i mianownika:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = +\frac{9}{25} = \frac{9}{25}$$

Teraz wykładnik potęgi odnosi się:

a) tylko do licznika: $\frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}$ b) tylko do mianownika: $\frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$

Gdy masz w nawiasie więcej czynników, to potęgujesz każdy z nich:

$$a) (-4abcd)^2 = 16a^2b^2c^2d^2$$

$$b) \left(-a \cdot \frac{4}{5} \cdot b \cdot e\right)^3 = (-a^3) \frac{64}{125} b^3 e^3 = -\frac{64}{125} a^3 b^3 e^3$$

Praca domowa:

1. Zredukuj wyrazy podobne:

$$a) 3x - 50y + 8x - 4x \quad b) 5x^2 - 6x - 7x + x^2$$

2. Opuść nawiasy i zredukuj wyrazy podobne:

$$a) (-5x + 6y) - (-2x + 4y)$$

$$b) (6a + 7b - 3c) - 5a - (4a - 9b - 20c)$$

3. Wykonaj mnożenie:

$$a) (-3x - 5y)(-6x - 4y)$$

$$b) (6x - 7y)(-2x - 8 + 3y)$$

4. Oblicz potęgi:

$$a) -3^2 \quad d) (-3)^2 \quad g) \left(-\frac{4}{5}\right)^2 \quad j) [a(-3)^{-1}bc]^3$$

$$b) -6^2 \quad e) (-6)^2 \quad h) -\frac{4^2}{5} \quad k) (x^2y7z)^3$$

$$c) -7^2 \quad f) (-7)^2 \quad i) \frac{7}{5^2} \quad l) \left(-\frac{8}{11}yz^4x\right)^2$$

Odpowiedzi:

$$1. a) 7x - 50y \quad b) 6x^2 - 13x$$

$$2. a) -3x + 2y \quad b) -3a + 16b + 17c$$

$$3. a) 18x^2 + 42xy + 20y^2$$

$$b) -12x^2 - 48x + 32xy + 56y - 21y^2$$

$$4. a) -9 \quad d) 9 \quad g) \frac{16}{25} \quad j) -\frac{1}{27}a^3b^3c^3$$

$$b) -36 \quad e) 36 \quad h) -3\frac{1}{5} \quad k) 343x^6y^3z^3$$

$$c) -49 \quad f) 49 \quad i) \frac{7}{25} \quad l) \frac{64}{121}x^2y^2z^8$$