42. FUNKCJA LOGARYTMICZNA

$\log_a b \longrightarrow$ b – liczba logarytmowana

a – podstawa logarytmu

Definicja. Logarytmem przy podstawie a z liczby dodatniej b nazywamy taką liczbę c, że a podniesione do potęgi c daje liczbę b.

$$\log_a b = c \quad \text{bo} \quad a^c = b$$

np. $\log_3 9 = 2$ bo $3^2 = 9$

Logarytm istnieje tylko wtedy, gdy są spełnione trzy warunki, które nazywamy założeniami lub dziedziną logarytmu:

- Podstawa logarytmu musi być dodatnia, $a > 0$
- Podstawa musi być różna od 1, $a \neq 1$
- Liczba logarytmowana musi być dodatnia, $b > 0$

$$\boxed{a > 0 \ \text{i} \ a \neq 1 \ \text{i} \ b > 0}$$

Na te założenia zwraca się szczególną uwagę na profilu rozszerzonym i wkrótce powrócimy do tego tematu.

OBLICZANIE LOGARYTMU

Obliczanie logarytmów nazywam żartobliwie spacerem wokół drzewa, bo w celu obliczenia wyniku zatacza się strzałkowe kółko.
Miej pod ręką zestaw potęg na podstawę: 2, 3, 5, 10, będzie Ci bardzo pomocny.

Przykłady. Obliczymy logarytmy:

a) $\log_2 8$ dopisz znak równości i x, aby mieć równanie;

$\log_2 8 = x$ zaznacz strzałkowe kółko: od 2 do x i od x do 8;

$\log_2 8 = x$ liczby 2 i x zapisujemy jako potęgę równą 8;

$2^x = 8$ należy obliczyć x; tak samo jak w równaniu wykładniczym zamieniamy 8 na 2^3;

$2^x = 2^3$ podstawy opuszczamy, skoro są równe, to wykładniki też;

$\cancel{2}^x = \cancel{2}^3$ funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa;

$x = 3$

Sprawdzenie. $2^3 = 8$. Odp. $\log_2 8 = 3$.

W obliczaniu logarytmu zapisujemy potęgowanie, podstawy doprowadzamy do tej samej liczby, potem je opuszczamy i obliczamy x.

---

b) $\mathbf{\log_2 32}$ dopisujemy znak równości i $\boldsymbol{x}$;

$\mathbf{\log_2 32 = \boldsymbol{x}}$ rysujemy strzałkowe kółko;

$\log_2 32 = x$ 2 i x zapisujemy w postaci potęgi i równamy ją do 32;

$2^x = 32$ zamieniamy 32 na 2^5, aby mieć te same podstawy;

$\cancel{2}^x = \cancel{2}^5$ opuszczamy podstawy i przyrównujemy wykładniki;

$\boldsymbol{x = 5}$

Sprawdzenie. $2^5 = 32$ Odp. $\log_2 32 = 5$.

---

c) $\mathbf{\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}}$ dopisujemy znak równości i x;

$\mathbf{\log_{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{9}\right) = \boldsymbol{x}}$ rysujemy strzałkowe kółko;

$\log_{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{9}\right) = x$ zapisujemy potęgowanie;

$\sqrt{3}^x = \frac{1}{9}$ obie podstawy sprowadzamy do 3; $\sqrt{3} = \sqrt[2]{3^1} = 3^{\frac{1}{2}}$

$(3^{\frac{1}{2}})^x = 3^{-2}$ wymnażamy po lewej wykładniki; $\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3^{-2}$

$3^{\frac{1}{2}x} = 3^{-2}$ opuszczamy podstawy;

$\cancel{3}^{\frac{1}{2}x} = \cancel{3}^{-2}$

$\frac{1}{2}x = -2 \quad /:\frac{1}{2}$ obliczamy x;

$x = -2 \cdot \frac{2}{1}$ to $\boldsymbol{x = -4}$

Odp. $\log_{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{9}\right) = -4$ Sprawdzimy poprawność rozwiązania:

$$\sqrt{3}^{-4} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}} = \frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9}$$

Jeśli logarytm ma podstawę 10, to jej nie piszemy:

np. $\mathbf{\log_{10} 100 = \log 100}$

$\mathbf{\log_{10} 1000 = \log 1000}$

Przykład. Obliczymy $\mathbf{\log 1000}$.

$\mathbf{\log 1000 = \boldsymbol{x}}$ dopisujemy i robimy strzałkowe kołko;

$\log_{10} 1000 = x$ można dopisać podstawę 10, zapisujemy potęgowanie;

$10^x = 1000$ zamieniamy 1000 na 10^3, aby mieć te same podstawy;

$10^x = 10^3$ opuszczamy podstawy i otrzymujemy x;

$\boldsymbol{x = 3}$

GDY x JEST LICZBĄ LOGARYTMOWANĄ

Niewiadoma może być też w liczbie logarytmowanej. Nadal w taki sam sposób zapisujemy potęgowanie i obliczamy wynik.

Przykłady. Obliczymy $\boldsymbol{x}$ z równania:

a) $\mathbf{\log_3 \boldsymbol{x} = 2}$

ważne jest założenie dla $\boldsymbol{x}$, musi ono być dodatnie, więc $\boldsymbol{x > 0}$;
zaznaczamy strzałkowe kółko i zapisujemy potęgowanie:

$\mathbf{\log_3 \boldsymbol{x} = 2}$

$3^2 = x$ wykonujemy działanie;

$9 = x$ to $\boldsymbol{x = 9}$ ta liczba spełnia założenie, $\mathbf{9 > 0}$.

Odp. Szukaną liczbą jest 9.

---

b) $\mathbf{\log_5(\boldsymbol{x} - 3) = 1}$ zał. $\boldsymbol{x - 3 > 0}$, to $\boldsymbol{x > 3}$

$\log_5(x-3) = 1$ zapisujemy potęgę;

$5^1 = x - 3$ równanie liniowe, obliczamy x;

$5 = x - 3$ zamienimy strony równania;

$x - 3 = 5$ to $\boldsymbol{x = 8}$ ta liczba spełnia warunek, $\mathbf{8 > 3}$

Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba 8.

GDY x JEST PODSTAWĄ LOGARYTMU

Przykłady. Obliczymy $\boldsymbol{x}$ z równania:

a) $\mathbf{\log_{\boldsymbol{x}} 9 = 2}$ konieczne jest założenie do podstawy: $\boldsymbol{a > 0}$ i $\boldsymbol{a \neq 1}$

zatem: $\boldsymbol{x > 0}$ i $\boldsymbol{x \neq 1}$

$\log_x 9 = 2$ zapisujemy potęgę;

$x^2 = 9$ pierwiastkujemy obie strony i otrzymamy:

$\boldsymbol{x = 3}$ lub $\boldsymbol{x = -3}$

Liczba 3 spełnia warunki zadania, $\mathbf{3 > 0}$ i $\mathbf{3 \neq 1}$, ale (-3) nie, bo podstawa logarytmu musi być dodatnia, co wynika z założenia $\boldsymbol{x > 0}$; więc wykluczamy wynik (-3).

Odp. Rozwiązaniem jest tylko liczba 3.

---

b) $\mathbf{\log_{\boldsymbol{x}} 125 = 3}$ założenie: $\boldsymbol{x > 0}$ i $\boldsymbol{x \neq 1}$

$x^3 = 125 \quad / \sqrt[3]{}$

$x = \sqrt[3]{125}$

$\boldsymbol{x = 5}$ spełnia założenie.

Odp. Rozwiązaniem jest liczba 5.
