

37. FUNKCJA KWADRATOWA

Gdy we wzorze funkcji najwyższą potęgą jest x^2 , jest to funkcja kwadratowa. Oprócz x^2 mogą być w niej również inne składniki.

Przykłady.

$$f(x) = 2x^2, \quad f(x) = 3x^2 + 2x, \quad y = x^2 + 5x + 1, \quad f(x) = x^2 - 4.$$

Wzór funkcji kwadratowej ma postać:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{lub} \quad y = ax^2 + bx + c$$

Ta postać nazywa się **ogólna**.

Wkrótce poznasz jeszcze dwie, całkiem inne postacie funkcji kwadratowej (kanoniczną i iloczynową).

Funkcja kwadratowa jest w programie I klasy szkoły średniej i poznasz ją jako następną po funkcji liniowej. Obie są bardzo ważne i w dużej mierze inne funkcje na nich się opierają. Zadania z zakresu liniowej i kwadratowej zawsze są na maturze.

Współczynniki a, b, c , to dowolne liczby, ale $a \neq 0$, bo tylko wtedy istnieje x^2 . Gdyby a było zerem, znika Ci składnik x^2 i masz wzór funkcji liniowej np. $y = 3x + 1$.

Zatem współczynniki b i c mogą być zerami, ale współczynnik a nigdy.

Współczynnik a to liczba stojąca przy x^2 ;

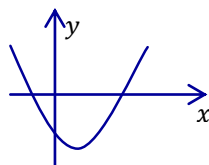
Współczynnik b stoi zawsze przy x ;

Współczynnik c to wyraz wolny, czyli sama liczba.

Przykłady. Tabela przedstawia wzory funkcji kwadratowych oraz współczynniki a, b, c w tych wzorach. Przeanalizuj je:

Wzór funkcji	a	b	c
$y = 2x^2 + 4x + 5$	2	4	5
$y = 3x^2 - 7x - 6$	3	-7	-6
$y = \frac{3}{4}x^2 + 6x - 0,2$	$\frac{3}{4}$	6	-0,2
$y = x^2 + 5x$	1	5	0
$y = -2x^2 + 3x$	-2	3	0
$y = x^2 - 4$	1	0	-4
$y = -x^2 - \sqrt{6}$	-1	0	- $\sqrt{6}$

Wykresem funkcji kwadratowej jest **parabola** (rys.)
Narysujesz ją, gdy wyznacysz np. w tabelce kilka jej punktów, podobnie jak dla wykresu funkcji liniowej.



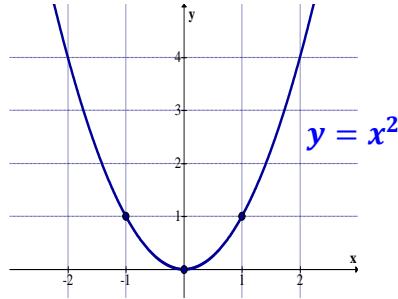
ELEMENTARNE PARABOLE

1. Podstawowa parabola ma wzór $y = x^2$.

Do tabelki podstawiasz za x kilka liczb i podnosisz je do kwadratu:

x	0	1	-1	2	-2
$y = x^2$	0	1	1	4	4

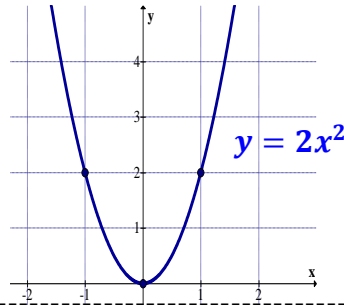
Parabola $y = -x^2$ ma ten sam kształt, ale rysuj ją w odbiciu lustrzanym, symetrycznie do osi X .



2. Parabola $y = 2x^2$. Najpierw x podnosisz do kwadratu, a potem mnożysz otrzymaną liczbę przez 2.

x	0	1	-1
$y = 2x^2$	0	2	2

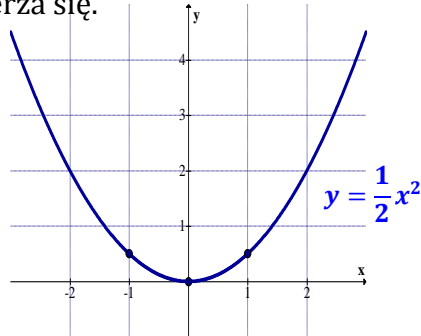
Parabolę $y = -2x^2$ narysujesz symetrycznie do osi X .



3. Parabola $y = \frac{1}{2}x^2$. Wykres rozszerza się.

x	0	1	-1
$y = \frac{1}{2}x^2$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Wykres $y = -\frac{1}{2}x^2$ narysujesz symetrycznie do osi X .



Zauważ, że w parabolach $y = ax^2$ wierzchołek jest zawsze w środku $(0; 0)$, a dwa pozostałe punkty mają współrzędne: $(1; a)$ i $(-1; a)$.

Inne wykresy np. $y = x^2 + 2x + 3$, $y = 2x^2 + 4x$, $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ mają tę samą rozpiętość co powyższe $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, ale są położone w innym miejscu na układzie współrzędnych. To położenie zależy od umiejscowienia wierzchołka paraboli. I o tym napiszę Ci teraz.

WIERZCHOŁEK PARABOLI

Wierzchołek to najniższy lub najwyższy punkt na paraboli. Jego współrzędne oznaczasz jako $W = (x_w; y_w)$ lub $W = (p; q)$.

Aby obliczyć wierzchołek, należy współczynniki a, b, c , podstawić do

wzorów: $p = \frac{-b}{2a}$ i $q = \frac{-\Delta}{4a}$ i $\Delta = b^2 - 4ac$

Ten mały trójkącik Δ to grecka litera delta.

Przykład. Narysujemy parabolę $y = x^2 + 2x + 3$.

Ma ona ten sam kształt co $y = x^2$, a jej miejsce na układzie wskaże Ci punkt wierzchołka. Obliczasz p, q i Δ .

Wypisujesz współczynniki: $a = 1, b = 2, c = 3$.

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

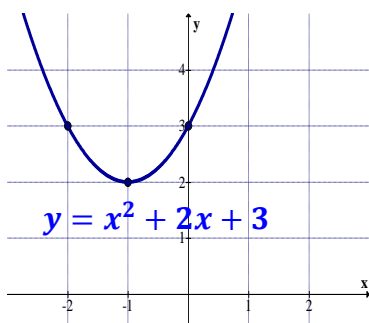
$$q = \frac{-\Delta}{4a} \quad \text{do } q \text{ potrzebna jest delta: } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-8)}{4 \cdot 1} = \frac{8}{4} = 2 \qquad \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$$

Punkt wierzchołka paraboli, czyli $W = (-1; 2)$ już masz.

Drugi punkt paraboli ustalisz wiedząc, że w pierwotnej $y = x^2$ od wierzchołka jest 1 jednostka w prawo i 1 w górę. Otrzymasz $(0; 3)$.

Trzeci punkt to 1 jednostka w lewo i 1 w górę, więc masz $(-2; 3)$.



Wzoruj się na kształtach paraboli

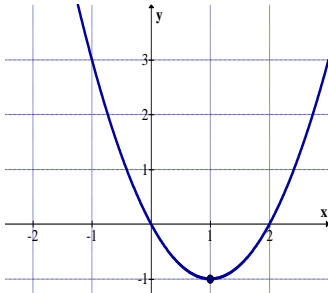
$$y = x^2, y = 2x^2, y = \frac{1}{2}x^2 \text{ itd.}$$

WŁASNOŚCI FUNKCJI KWADRATOWEJ

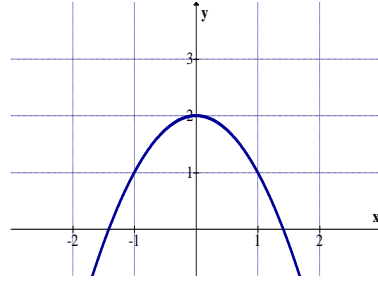
Wszystkie własności, które wytłumaczyłam Ci dla funkcji liniowej, mają swoje odniesienie również dla funkcji kwadratowej.

1. Dziedzina. Dziedziną D funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych. Bo cokolwiek wstawisz do wzoru funkcji za x , to zawsze obliczysz wartość y . Zatem $D = R$.

2. Zbiór wartości. ZW odczytujesz z osi Y , czyli od jakiego y zaczyna się wierzchołek paraboli i dokąd zmierzają jej ramiona (do ∞ czy do $-\infty$).

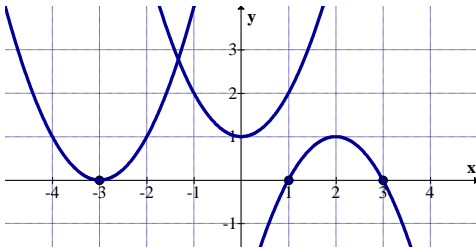


$$ZW = \langle -1; +\infty \rangle$$



$$ZW = \langle -\infty; 2 \rangle$$

3. Miejsca zerowe. To punkty przecięcia paraboli z osią X . Wykres może mieć dwa punkty na osi X , jeden punkt lub nie mieć ich wcale.

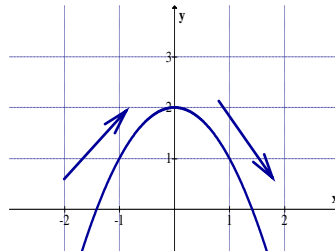
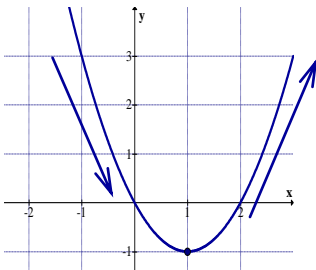


To od delty zależy, ile wykres ma miejsc zerowych.
O tym napiszę Ci wkrótce.

4. Monotoniczność. Badasz, kiedy funkcja jest rosnąca i malejąca.

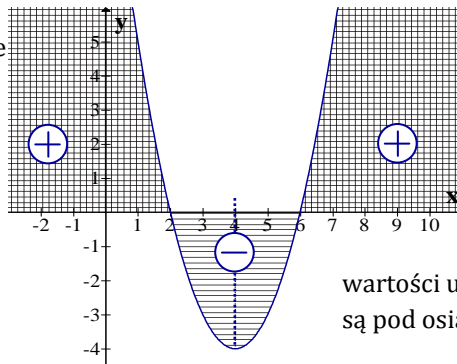
a) do $x = 1$ funkcja maleje
od $x = 1$ funkcja rośnie

b) do $x = 0$ funkcja rośnie
od $x = 0$ funkcja maleje



5. Wartości dodatnie i ujemne. Dodatnie są nad osią X , a ujemne pod X .

wartości dodatnie
są nad osią X

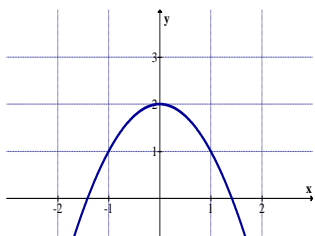


wartości dodatnie
są nad osią X

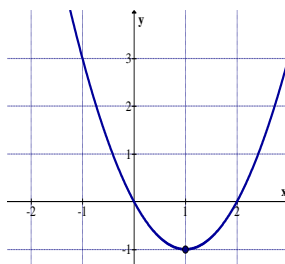
wartości ujemne
są pod osią X

6. Wartość y największa lub najmniejsza. Decyduje o niej wierzchołek.

maksimum $y_{max} = 2$



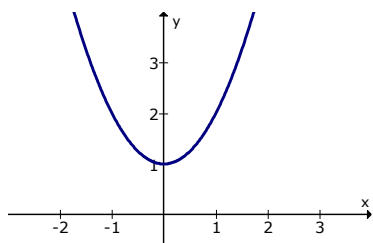
minimum $y_{min} = -1$



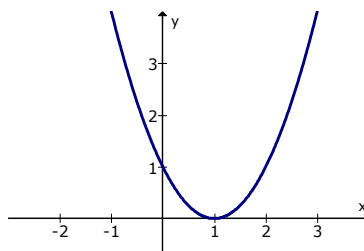
Zauważ, że y_{max} lub y_{min} to liczba q z wierzchołka paraboli.

***7. Parzystość.** Tylko ta funkcja kwadratowa jest parzysta, gdy wykres przebiega symetrycznie względem osi Y ;

a) ta **jest** parzysta



b) ta **nie jest** parzysta

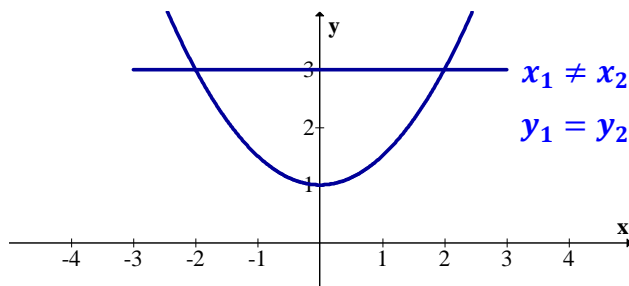


***8. Nieparzystość.** Funkcja kwadratowa **nie jest** nieparzysta, bo niemożliwe jest, aby parabola była symetryczna względem środka $(0;0)$.

***9. Różnowartościowość.** Funkcja kwadratowa **nie jest** różnowartościowa. Byłaby, gdyby dla różnych $x_1 \neq x_2$ były różne wartości $y_1 \neq y_2$.

Jednak w każdej funkcji kwadratowej dla różnych x są te same y .

W przypadku poniższej paraboli $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, zaś $y_1 = y_2 = 3$.



***10. Okresowość.** **Nie jest** okresowa. Nie badasz tej własności w funkcji kwadratowej.

Komentarz. Wkrótce, na wzorze funkcji, poćwiczmy te własności.

TRZY SZCZEGÓLNE PUNKTY NA PARABOLI

Każdą parabolę można narysować znając jej 3 punkty:

1. Wierzchołek ($p; q$), wzory: $p = \frac{-b}{2a}$; $q = \frac{-\Delta}{4a}$; $\Delta = b^2 - 4ac$

2. Miejsca zerowe x_1 i x_2 , czyli punkty przecięcia paraboli z osią X .

Miejsca zerowe obliczasz z wzorów: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

WPŁYW DELTY NA LICZBĘ MIEJSC ZEROWYCH

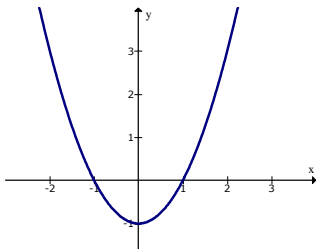
Jeśli chcemy zbadać, ile miejsc zerowych ma parabola, obliczamy deltę:

1. Gdy jest dodatnia, $\Delta > 0$, parabola ma 2 punkty wspólne z osią X , czyli dwa, różne miejsca zerowe x_1 i x_2 .

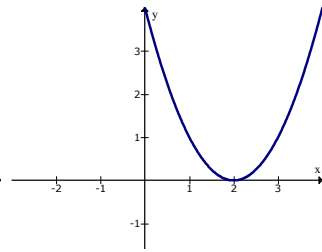
2. Gdy delta jest zerowa, $\Delta = 0$, parabola ma 1 punkt wspólny z osią X , czyli jedno miejsce zerowe i wtedy $x_1 = x_2$.

3. Gdy delta jest ujemna, $\Delta < 0$, parabola nie ma miejsc zerowych.

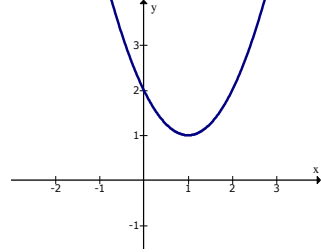
1. Dwa m. zerowe



2. Jedno m. zerowe



3. Brak miejsc zerowych



Jeśli liczba jest miejscem zerowym, to wstawiona za x do wzoru funkcji, daje wynik zerowy. Np. 1 jest miejscem zerowym $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

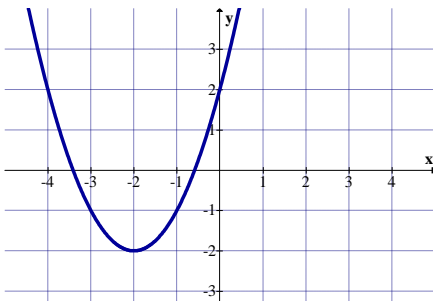
$$f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$$

ROLA WSPÓŁCZYNNIKA a i c .

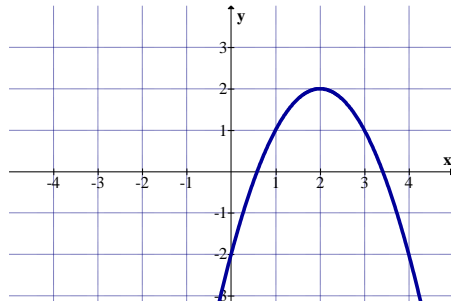
Gdy współczynnik a jest dodatni, ramiona paraboli kierują się **do góry**.

Gdy współczynnik a jest ujemny, ramiona są skierowane **w dół**.

$a > 0$



$a < 0$



Współczynnik c – wyraz wolny, wskazuje miejsce przecięcia paraboli z osią Y . Zatem jest to punkt o współrzędnych $(0; c)$.

Parabola $y = x^2 - 2x + 1$ przecina oś Y w punkcie $(0; 1)$.

Parabola $y = x^2 + x - 3$ przecina oś Y w punkcie $(0; -3)$.

Przykład. Narysujemy wykres $f(x) = x^2 - 4x$ i wypiszemy własności.

Masz współczynniki: $a = 1$, $b = -4$, $c = 0$.

Do wyznaczenia trzech, najważniejszych punktów paraboli, czyli wierzchołka $W = (p; q)$ oraz miejsc zerowych x_1 i x_2 , potrzebna jest delta, więc od niej zacznij obliczenia:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 16 - 0 = 16$$

Wyznaczasz współrzędne wierzchołka $W = (p; q)$.

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

wierzchołek paraboli:

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16}{4 \cdot 1} = \frac{-16}{4} = -4$$

$$W = (2; -4)$$

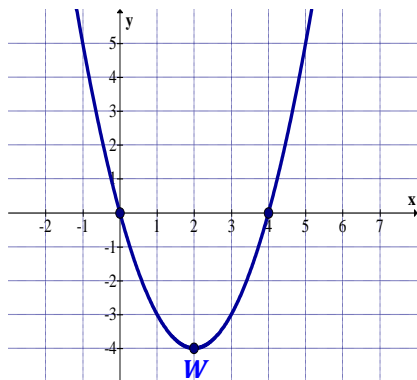
Delta jest dodatnia, więc są 2 punkty przecięcia paraboli z osią X .

$\Delta = 16$ więc $\sqrt{\Delta} = 4$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 4}{2 \cdot 1} = \frac{0}{2} = 0 \quad \text{lub} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 4}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$$

Otrzymane trzy punkty: $W = (2, -4)$, $x_1 = 0$ i $x_2 = 4$ zaznaczasz na układzie współrzędnych:

Wykres $y = x^2 - 4x$



Własności:

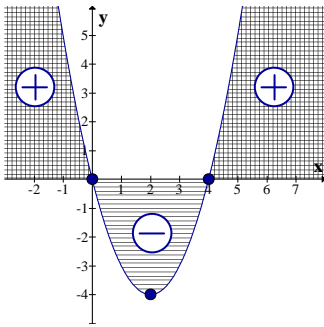
1. Dziedzina $D = R$
2. Zbiór wartości $ZW = \langle -4; +\infty \rangle$
3. Miejsca zerowe: 0 i 4
4. Monotoniczność:
 - a) funkcja malejąca, $x \in \langle -\infty; 2 \rangle$
 - b) funkcja rosnąca, $x \in \langle 2; +\infty \rangle$

Jeśli masz polecenie, aby podać **maksymalne przedziały monotoniczności**, to dla 2 dasz nawiasy zamknięte. Wtedy do 2 włącznie funkcja maleje i od 2 włącznie funkcja rośnie.

Komentarz. Niestety, rzadko takie polecenie jest podawane, a w ostatnim czasie i tak piszecie nawiasy zamknięte. Tak też i ja w punktach a) i b) uczyniłam.

5. Wartości dodatnie i ujemne.

Dodatnie są **nad** osią X , a **ujemne pod** osią X . Zapisujesz przedziały:



$f(x) > 0$, gdy $x \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$
 między zbiorami dajesz znasz \cup sumy;
 $f(x) < 0$, gdy $x \in (0; 4)$

6. Wartość minimalna, minimum:
 $y_{min} = -4$ dla $x = 2$.

*7. Parzysta nie jest, bo oś Y nie jest osią symetrii tej paraboli.

*8. Różnowartościowa nie jest, bo dla różnych x jest ta sama wartość y .

Praca domowa:

1. Oblicz wierzchołek $(p; q)$ paraboli:

a) $y = 3x^2 + 2x - 1$ b) $y = 4x^2 - x - 2$ c) $f(x) = -x^2 - x + 2$

2. Oblicz deltę, pierwiastek z delty oraz miejsca zerowe x_1, x_2 :

a) $y = 3x^2 - 4x + 1$ b) $f(x) = -4x^2 + 2x + 12$

Odpowiedzi:

1. a) $p = -\frac{1}{3}, q = -1\frac{1}{3}$ b) $p = \frac{1}{8}, q = -2\frac{1}{16}$ c) $p = -\frac{1}{2}, q = 2\frac{1}{4}$

2. a) $\Delta = 4; \sqrt{\Delta} = 2; x_1 = \frac{1}{3}$ lub $x_2 = 1$

b) $\Delta = 196; \sqrt{\Delta} = 14; x_1 = 2$ lub $x_2 = -1\frac{1}{2}$

POSTAĆ KANONICZNA FUNKCJI KWADRATOWEJ

Funkcja kwadratowa oprócz postaci ogólnej $y = ax^2 + bx + c$, może przyjąć **postać kanoniczną**. Ja ją także nazywam wierzchołkową lub wektorową, bo we wzorze kanonicznym są wpisane współrzędne wierzchołka $(p; q)$ paraboli i zarazem współrzędne wektora $[p; q]$.

Postać kanoniczna ma wzór $y = a(x - p)^2 + q$

Jeśli masz zamienić postać ogólną na **kanoniczną**, obliczasz wierzchołek paraboli i w współrzędne $(p; q)$ wstawiasz do wzoru kanonicznego.

Przykład. Zamienimy postać ogólną $y = 3x^2 - 2x + 1$ na kanoniczną.

Wypisujesz współczynniki: $a = 3, b = -2, c = 1$.

Obliczasz wierzchołek:

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-8)}{4 \cdot 3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 - 12 = -8$$

Współrzędne wierzchołka $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ wpisujesz do wzoru kanonicznego: $y = a(x - p)^2 + q$ przed nawiasem wstawiasz współczynnik $a = 3$, w nawiasie obok x piszesz p ze zmienionym znakiem, więc $\left(-\frac{1}{3}\right)$, nawias podnosisz do kwadratu, a na końcu dopisujesz $q = \frac{2}{3}$:

$y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$ to jest postać **kanoniczna** funkcji kwadratowej.

Przykłady. Mając postać kanoniczną, odczytamy współczynnik a oraz współrzędne p i q wierzchołka paraboli.

a) $y = -2(x + 6)^2 + 7$

– współczynnik a jest przed nawiasem, więc $a = -2$;

– współrzędna p wierzchołka ma w nawiasie przeciwny znak, więc $p = -6$; współrzędna q wierzchołka jest za nawiasem, to $q = 7$;

b) $y = -(x - 4)^2 + 2$ $a = -1, p = 4, q = 2$

Gdy nie wszystkie liczby widać we wzorze, możesz jego zapis uzupełnić zerem i łatwo wtedy odczytasz wierzchołek.

c) $y = 3(x - 4)^2$ na końcu dopiszesz zero;

$y = 3(x - 4)^2 + 0$ więc $a = 3, p = 4, q = 0$

d) $y = 4x^2 + 2$ nie ma tu nawiasu, ale można go wpisać z zerem;

$y = 4(x + 0)^2 + 2$ teraz łatwiej Ci odczytać wierzchołek;

$a = 4, p = 0, q = 2$

Przykład. Zamienimy postać kanoniczną $y = 2(x - 4)^2 + 3$ na ogólną.

Postać ogólną otrzymasz, gdy w tym wzorze wyliczysz działania.

Dla nawiasu zastosuj wzór skróconego mnożenia:

$$y = 2 \cdot (x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2) + 3 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$y = 2 \cdot (x^2 - 8x + 16) + 3$$

$$y = 2x^2 - 16x + \underline{32} + \underline{3} \quad \text{redukujesz wyrazy podobne;}$$

$$y = 2x^2 - 16x + 35 \quad \text{gotowa postać ogólna.}$$

Praca domowa:

1. Odczytaj współczynnik a oraz wierzchołek paraboli:

a) $y = (x + 1)^2 + 3$ c) $y = 2(x - 1)^2$ e) $y = 2x^2 + 2$

b) $y = 2(x - 4)^2 + 5$ d) $y = 4(x + 2)^2$ f) $y = x^2 - 1$

2. Zamień postać kanoniczną na ogólną:

a) $y = 2(x + 3)^2 - 4$ b) $y = 3(x - 2)^2 + 1$

Odpowiedzi:

1. a) $a = 1, W = (-1; 3)$ c) $a = 2, W = (1; 0)$ e) $a = 2, W = (0; 2)$
 b) $a = 2, W = (4; 5)$ d) $a = 4, W = (-2; 0)$ f) $a = 1, W = (0; -1)$
 2. a) $y = 2x^2 + 12x + 14$ b) $y = 3x^2 - 12x + 13$

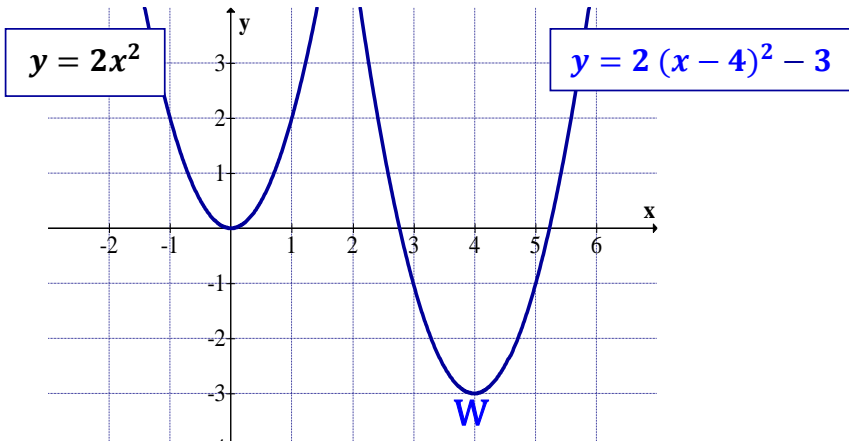
PARABOLA PRZESUNIĘTA O WEKTOR

We wzorze kanonicznym $y = a(x - p)^2 + q$ liczby p i q to współrzędne wierzchołka $W = (p; q)$, ale też wektora $\vec{w} = [p; q]$ o jaki została przesunięta parabola $y = ax^2$.

Przykład. Parabole $y = 2(x - 4)^2 - 3$ otrzymasz, kiedy o $\vec{w} = [4; -3]$ przesuniesz elementarną parabolę, czyli $y = 2x^2$.

Jeśli chcesz narysować ten wykres, to parabolę $y = 2x^2$ umieść w punkcie wierzchołka, czyli w $(4; -3)$.

To tak jak przesuwać punkty paraboli $y = 2x^2$ o wektor $\vec{w} = [4; -3]$.



ZAD. 40. Wyznacz wzór paraboli $f(x) = 3x^2$ w przesunięciu o wektor:

- a) $\vec{w} = [1; 2]$ b) $\vec{w} = [-2; -3]$ c) $\vec{w} = [-4; 3]$

® Na początku wzoru kanonicznego wpiszesz współczynnik a ; potem w nawiasie pierwszą współrzędną wektora, czyli p z przeciwnym znakiem, a drugą współrzędną q wpisujesz bez zmian:

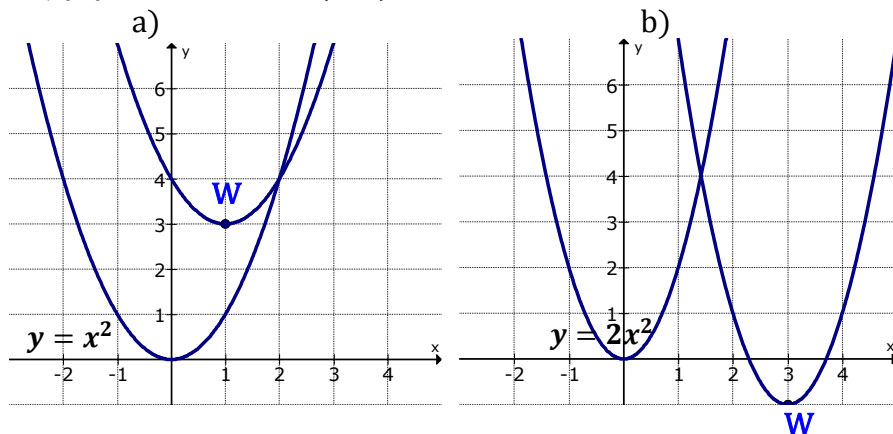
- a) $f(x) = 3x^2$ $a = 3$, $\vec{w} = [1; 2]$, wzór $f(x) = a(x - p)^2 + q$
 otrzymasz postać kanoniczną $f(x) = 3(x - 1)^2 + 2$;
 b) $f(x) = 3x^2$ $\vec{w} = [-2; -3]$ i masz $f(x) = 3(x + 2)^2 - 3$
 c) $f(x) = 3x^2$ $\vec{w} = [-4; 3]$ i masz $f(x) = 3(x + 4)^2 + 3$

Komentarz. Mając postać kanoniczną łatwo narysujesz parabolę. Należy wtedy elementarną parabolę np. $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x^2$ itd. umieścić w odczytanym z wzoru wierzchołku lub ją przesunąć o wektor.

Przykłady.

a) aby narysować wykres $y = (x - 1)^2 + 3$, należy parabolę $y = x^2$, mającą wierzchołek w $(0; 0)$ umieścić w wierzchołku $W = (1; 3)$.

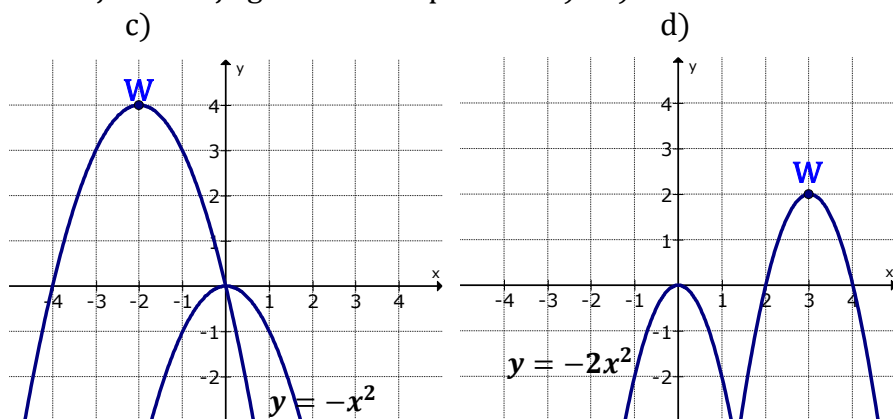
b) aby narysować wykres $y = 2(x - 3)^2 - 1$, należy parabolę $y = 2x^2$ mającą wierzchołek w $(0; 0)$ umieścić w wierzchołku $W = (3; -1)$.



c) aby narysować wykres $y = -(x + 2)^2 + 4$, należy parabolę $y = -x^2$, która ma ramiona w dół i wierzchołek w $(0; 0)$ umieścić w wierzchołku $W = (-2; 4)$;

d) aby narysować wykres $y = -2(x - 3)^2 + 2$, parabolę $y = -2x^2$, która ma ramiona w dół, należy umieścić w wierzchołku $W = (3; 2)$.

Poniżej ilustracja graficzna dla parabol c) i d).



POSTAĆ ILOCZYNOWA FUNKCJI KWADRATOWEJ

Funkcję kwadratową można też wyrazić w postaci **iloczynowej**.

Otrzymasz ją, gdy współczynnik a i miejsca zerowe x_1 i x_2 wstawisz do wzoru $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

Zauważ, że miejsca zerowe są w nim wpisane z przeciwnymi znakami.

Gdy masz zapis $y = 2(x - 1)(x - 4)$ to $x_1 = 1$ i $x_2 = 4$.

Do postaci iloczynowej są potrzebne x_1 i x_2 . Mają one wzory:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{i} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Różnią się one tylko znakiem przy pierwiastku z delty, czyli $\sqrt{\Delta}$.

Podsumowanie.

Teraz już wiesz, że funkcja kwadratowa może być zapisywana w **3** różnych postaciach, czyli:

- **ogólnej:** $y = ax^2 + bx + c$ np. $y = 2x^2 + 4x + 1$,
- **kanonicznej:** $y = a(x - p)^2 + q$ np. $y = 3(x - 1)^2 - 4$,
- **iloczynowej:** $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ np. $y = 4(x - 2)(x + 1)$.

Przykład. Zamienimy postać ogólną $y = 2x^2 - 3x + 1$ na iloczynową.

Wypisujesz współczynniki: $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$.

Obliczasz deltę i $\sqrt{\Delta}$, są one potrzebne do wzorów na x_1 i x_2 ;

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1 \quad \text{więc} \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$$

Obliczasz miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - 1}{2 \cdot 2} = \frac{3 - 1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{obie te liczby wstawiasz do}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + 1}{2 \cdot 2} = \frac{3 + 1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{wzoru iloczynowego;}$$

Wzór: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ więc po podstawieniu masz:

$$y = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 1)$$

Przykład. Zamienimy trójmian $y = x^2 - 6x + 9$ na postać iloczynową.

Współczynniki: $a = 1$, $b = -6$, $c = 9$.

Obliczasz Δ , $\sqrt{\Delta}$ oraz x_1 i x_2 .

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - 0}{2 \cdot 1} = 3 \quad \text{lub} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + 0}{2 \cdot 1} = 3$$

Wzór: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ miejsca zerowe są te same, $x_1 = x_2$

$$\text{to: } y = (x - 3)(x - 3) \quad \text{lub krócej: } y = (x - 3)^2$$

Zauważ, że we wzorach na x_1 i x_2 jest dodawane i odejmowane zero, które nie ma wpływu na wynik. Zatem:

gdy $\sqrt{\Delta} = 0$, to x_1 i x_2 są równe i można je obliczyć z wzoru bez $\sqrt{\Delta}$,

$$\text{czyli: } x = \frac{-b}{2a}$$

Przykład. Zamienimy postać ogólną $y = x^2 + 9$ na iloczynową.

Obliczasz Δ , $\sqrt{\Delta}$ oraz x_1 i x_2 .

Współczynniki: $a = 1$, $b = 0$, $c = 9$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = -36$$

Nie istnieje pierwiastek kwadratowy z liczby ujemnej, a to oznacza, że nie masz co wstawić w miejsce $\sqrt{\Delta}$ do wzorów na x_1 i x_2 .

Odp. Funkcja nie ma postaci iloczynowej.

Przykład. Zamienimy postać iloczynową $y = 3(x + 6)(x - 2)$ na ogólną.

Aby do postaci ogólnej dojść, należy wykonać wszystkie mnożenia.

$y = 3(x + 6)(x - 2)$ wymnażasz oba nawiasy;

$y = 3(x^2 - 2x + 6x - 12)$ mnożysz 3 przez każdy składnik;

$y = 3x^2 - 6x + 18x - 36$ redukujesz wyrazy podobne;

$y = 3x^2 + 12x - 36$ gotowa postać ogólna.

Praca domowa:

1. Zamień postać ogólną $y = 4x^2 + 5x - 9$ na iloczynową.

2. Zamień postać iloczynową $y = -2(x + 3)(x - 4)$ na ogólną.

3. Oblicz miejsca zerowe x_1, x_2 funkcji kwadratowych:

a) $y = -2x^2 + 3x - 1$ b) $y = 6x^2 + 2x - 8$ c) $y = x^2 + 2x - 8$

4. Wykres funkcji $f(x) = 2x^2$ przesunięto o wektor $\vec{w} = [3; 4]$. W ten sposób otrzymano wykres funkcji $h(x)$. Wyznacz wzór $h(x)$.

5. Zamień postać kanoniczną na ogólną:

a) $y = 3(x - 2)^2 + 5$ b) $y = -(x - 4)^2 + 10$

Odpowiedzi:

1. $y = 4\left(x + 2\frac{1}{4}\right)(x - 1)$

2. $y = -2x^2 + 2x + 24$

3. a) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ b) $x_1 = -1\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$ c) $x_1 = -4$, $x_2 = 2$

4. $h(x) = 2(x - 3)^2 + 4$

5. a) $y = 3x^2 - 12x + 17$ b) $y = -x^2 + 8x - 6$

***WZORY VIETE'A, CZYLI „MINUS BACA”**

François Viète

Francuski matematyk i astronom,
który żył w XVI wieku.
Jego wzory pomagają określić znaki
miejsc zerowych x_1 i x_2 .



Wzory Viete'a: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$
 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Oba wzory łatwo zapamiętać czytając te ułamki w pionie: „minus baca”. Na ich podstawie możesz bez obliczania x_1 i x_2 zbadać, jakich one są znaków: czy oba są dodatnie (+;+), czy ujemne (-;-), czy różnych znaków (+;-). Wtedy wstawiasz współczynniki a, b, c , do powyższych ułamków i badasz znak obu wyników.

Wzory Viete'a służą też do obliczania wartości różnych wyrażeń, w których występują miejsca zerowe x_1 i x_2 .

Przykład.

Nie obliczając miejsc zerowych funkcji $y = x^2 + 3x - 4$ ustalimy, jakich znaków są x_1 i x_2 .

Wypisujesz współczynniki: $a = 1, b = 3, c = -4$.

Najpierw obliczasz deltę, aby sprawdzić, czy miejsca zerowe są, bo tylko wtedy wzory Viete'a mają sens.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$$

Δ jest dodatnia, więc funkcja ma 2 miejsca zerowe x_1 i x_2 .

Podstawiasz współczynniki b i a do pierwszego wzoru Viete'a:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{1} = -3 \quad \text{ten wynik jest ujemny.}$$

Z trzech opcji (+; +), (-;-), (+;-) wyklucasz (+;+), bo suma dwóch liczb dodatnich nie może być liczbą ujemną.

Zostały Ci opcje: (-;-) i (+;-). Wstawiasz a i c do drugiego wzoru:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-4}{1} = -4 \quad \text{to jest liczba ujemna.}$$

Wynik ujemny w mnożeniu dają tylko dwie liczby o różnych znakach, więc odrzucasz opcję (-;-) i pozostaje Ci wariant (+;-).

Odp. Miejsca zerowe x_1 i x_2 funkcji $y = x^2 + 3x - 4$ mają różne znaki.

Komentarz. Szybciej obliczyć x_1 i x_2 z wzorów na x_1 i x_2 , by sprawdzić, jakich są znaków. Ale wzory Viete'a też w ten sposób ćwiczysz.

***ZAD. 41.** Mając funkcję $y = 5x^2 + 2x - 1$ oblicz wartość $9(x_1 + x_2)$.

Ⓜ Obliczasz deltę, aby zbadać, czy są miejsca zerowe.

$$a = 5, b = 2, c = -1, \quad \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 5 \cdot (-1) = 24$$

Delta jest dodatnia, są 2 miejsca zerowe, można stosować wzory Viete'a.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{5} \quad \text{tę liczbę wstawisz do wyrażenia:}$$

$$9(x_1 + x_2) = 9 \cdot \frac{-2}{5} = \frac{-18}{5} = -3\frac{3}{5}$$

Odp. Wartość wyrażenia $9(x_1 + x_2)$ wynosi $(-3\frac{3}{5})$.

Komentarz. Jeśli w tym lub podobnym zadaniu chcesz pominąć wzory Viete'a i wyliczyć miejsca zerowe tradycyjnym sposobem z wzorów na x_1 i x_2 , to powyżej otrzymasz: $x_1 = \frac{-2-2\sqrt{6}}{10}$ lub $x_2 = \frac{-2+2\sqrt{6}}{10}$. Wtedy trudniejsze okaże się obliczenie wyrażenia $9(x_1 + x_2)$.

Wzory Viete'a służą także do obliczania wartości innych wyrażeń, w których występują miejsca zerowe x_1 i x_2 np.:

$$\text{a) } x_1^2 + x_2^2 \quad \text{b) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad \text{c) } x_1^3 + x_2^3$$

Takie wyrażenia należy najpierw przekształcić, aby wzory Viete'a były w nich widoczne i dopiero potem podstawiać współczynniki a, b, c .

***ZAD. 42.** Dla $f(x) = x^2 + 5x - 6$ oblicz wartość wyrażenia $x_1^2 + x_2^2$.

Ⓜ Upewnij się, czy miejsca zerowe ta funkcja ma. Obliczasz Δ .

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49 \quad \text{są miejsca zerowe.}$$

Teraz należy przekształcić wyrażenie $x_1^2 + x_2^2$, aby były w nim widoczne wzory Viete'a. Pomoże Ci w tym wzór na kwadrat sumy.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{i po obliczeniu masz:}$$

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

Jest tu Twoje $x_1^2 + x_2^2$, lecz składnika $2x_1x_2$ należy się pozbyć.

Usuniesz go, bo kwadrat sumy ma trzy składniki i gdy za nimi dopiszesz $(-2x_1x_2)$, to wtedy $2x_1x_2$ się skróci, jak tutaj:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

W tym przekształconym wyrażeniu już widoczne są wzory Viete'a:

$$x_1^2 + x_2^2 = \underbrace{(x_1 + x_2)^2}_{\frac{-b}{a}} - \underbrace{2x_1x_2}_{\frac{c}{a}} \quad \text{wstawiasz współczynniki } a, b, c;$$

$$= \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \left(\frac{-5}{1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-6}{1} = 25 + 12 = 37$$

Odp. Wartość wyrażenia $x_1^2 + x_2^2$ wynosi 37.

***ZAD. 43.** Dla funkcji $f(x) = x^2 + x - 3$ oblicz wartość wyrażen:

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ b) $x_1^3 + x_2^3$

Ⓜ a) wyrażenie $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ to suma odwrotności x_1 i x_2 .

Sprowadzisz ułamki do wspólnego mianownika i dodasz je:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-b}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c} \quad \text{podstawiasz współczynniki } a, b, c;$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-b}{c} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

b) wyrażenie $x_1^3 + x_2^3$ to suma sześcianów x_1 i x_2 .

Zastosuj wzór skróconego mnożenia:

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \quad \text{zmień kolejność;} \\ &= (x_1 + x_2)[x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2] \quad \text{rozpiszesz } x_1^2 + x_2^2 \\ &= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - x_1x_2] \\ &= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] \quad \text{podstaw wzory Viète'a;} \end{aligned}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = \left(\frac{-b}{a}\right) \cdot \left[\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 3 \cdot \frac{c}{a}\right] \quad \text{wstaw współczynniki } a, b, c;$$

$$x_1^3 + x_2^3 = \left(\frac{-1}{1}\right) \cdot \left[\left(\frac{-1}{1}\right)^2 - 3 \cdot \frac{-3}{1}\right] = -1 \cdot (1 + 9) = -10$$

RÓWNANIA KWADRATOWE

Równania kwadratowe to bardzo ważny temat i często są na maturze.

Równania kwadratowe mogą być **pełne** lub **niepełne**.

W równaniu **pełnym** np. $7x^2 - 3x - 8 = 0$ widzisz jak na dłoni współczynniki a, b, c , bo są różne od zera.

W równaniu **niepełnym** liczby b lub c są zerami i masz wtedy dwa składniki np. $2x^2 - 4x = 0$ czy $x^2 - 4 = 0$, a nawet jeden np. $4x^2 = 0$.

Aby rozwiązać równanie **pełne** obliczasz najpierw Δ , żeby się dowiedzieć, czy są x_1 i x_2 . Jeśli $\Delta = 0$ lub $\Delta > 0$, a więc nie jest ujemna, to obliczasz $\sqrt{\Delta}$, a potem x_1 i x_2 , które są rozwiązaniem równania.

Równania **niepełne** rozwiązujesz krótszymi sposobami niż przy pomocy delty i o tym napiszę Ci za chwilę.

Liczby x_1 i x_2 mają trzy, stosowane określenia:



Liczba rozwiązań równania zależy od delty: gdy jest ona dodatnia, to są 2 rozwiązania, gdy zerowa to 1, gdy jest ujemna, to nie ma rozwiązania.

RÓWNANIA PEŁNE

Przykład. Rozwiążemy równanie $-2x^2 + 3x = 4 - 3x$.

Najpierw należy równanie uporządkować tak, aby wszystkie liczby znalazły się z lewej strony, a po prawej piszesz zero. Składniki z prawej strony przenosisz na lewą stronę ze zmienionym znakiem.

$-2x^2 + 3x - 4 + 3x = 0$ układasz od największej potęgi;

$-2x^2 + 6x - 4 = 0$ równanie jest już uporządkowane.

Wypisujesz współczynniki: $a = -2$, $b = 6$, $c = -4$.

Obliczasz deltę, aby wiedzieć się, czy są miejsca zerowe x_1 i x_2 ;

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4) = 36 - (4 \cdot 2 \cdot 4) = 36 - 32 = 4$

Są 2 miejsca zerowe. Potrzebny Ci jeszcze $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

Obliczasz x_1 i x_2 :

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 2}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$ lub $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 2}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$

Odp. Rozwiązaniem równania są liczby $x_1 = 2$ lub $x_2 = 1$.

Gdy podstawisz jeden lub drugi wynik do równania, to $L = P$.

Przykład. Rozwiążemy równanie $2x^2 + 6x + 10 = 0$.

Równanie jest już uporządkowane, wypisujesz współczynniki a, b, c ;

$a = 2$, $b = 6$, $c = 10$ obliczasz deltę potrzebną do wzorów;

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 80 = -44$ delta jest ujemna, to nie ma $\sqrt{-44}$.

Odp. Równanie nie ma rozwiązania.

Przykład. Rozwiążemy równanie $6x^2 - 2x - 1 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 4 + 24 = 28$

Nie ma wymiernego pierwiastka z 28. Należy liczbę 28 rozłożyć:

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = 2\sqrt{7}$ gotowe, obliczasz x_1 i x_2 ;

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - 2\sqrt{7}}{12} = \frac{1 - \sqrt{7}}{6}$ skracasz składniki ułamka przez 2;

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2\sqrt{7}}{12} = \frac{1 + \sqrt{7}}{6}$ skracasz składniki ułamka przez 2.

Odp. Rozwiązaniem równania są liczby $\frac{1 - \sqrt{7}}{6}$ lub $\frac{1 + \sqrt{7}}{6}$.

Przykład. Rozwiążemy równanie $x^2 + 4x + 4 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$ to $x_1 = x_2$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$ $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$

Odp. Rozwiązaniem równania jest (-2) . To pierwiastek dwukrotny.

- c) $x^2 = 5x$ porządkujesz, przenosisz $5x$ na lewą stronę;
 $x^2 - 5x = 0$ wyłączasz x przed nawias;
 $x \cdot (x - 5) = 0$ rozdzielasz ten iloczyn na 2 równania;
 $x = 0$ lub $x - 5 = 0$ obliczasz x z drugiego równania;
 $x = 5$

Odp. Rozwiązaniem równania są liczby $x_1 = 0$ lub $x_2 = 5$.

2. Sposób – zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów.

Stosujesz go, gdy masz x^2 i wyraz wolny np. $x^2 - 9 = 0$.

Tę różnicę, zgodnie z wzorem $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ należy zapisać w postaci dwóch nawiasów:

a) $x^2 - 9 = 0$

$(x - 3) \cdot (x + 3) = 0$ skoro wynik z mnożenia jest zerowy, to znaczy, że jeden z czynników jest zerem; na tej podstawie rozdzielasz iloczyn na 2 oddzielne równania:

$x - 3 = 0$ lub $x + 3 = 0$ z każdego równania obliczasz x ;
 $x = 3$ lub $x = -3$

Odp. Rozwiązaniem równania są liczby $x_1 = 3$ lub $x_2 = -3$.

b) $x^2 = 25$ przenosisz 25 na lewą stronę;

$x^2 - 25 = 0$ rozpisujesz tę różnicę na 2 nawiasy;

$(x - 5) \cdot (x + 5) = 0$ rozdzielasz iloczyn na 2 oddzielne równania;

$x - 5 = 0$ lub $x + 5 = 0$ z każdego równania obliczasz x ;

$x = 5$ lub $x = -5$

Odp. Rozwiązaniem równania są liczby 5 lub (-5) .

c) $2x^2 - 8 = 0$ zanim skorzystasz z wzoru, podziel przez 2;

$2x^2 - 8 = 0$ $/: 2$

$x^2 - 4 = 0$ rozkładasz tę różnicę kwadratów na 2 nawiasy;

$(x - 2) \cdot (x + 2) = 0$ rozdzielasz na 2 równania;

$x - 2 = 0$ lub $x + 2 = 0$ z każdego równania obliczasz x ;

$x = 2$ lub $x = -2$

Odp. Rozwiązaniem równania są liczby 2 lub (-2) .

d) $x^2 - 3 = 0$ nie ma dokładnego wyniku pierwiastka z 3, to zapisz liczbę 3 pod pierwiastkiem i będzie najdokładniej;

$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$ rozdzielasz iloczyn na 2 równania;

$x - \sqrt{3} = 0$ lub $x + \sqrt{3} = 0$ z każdego równania obliczasz x ;

$x = \sqrt{3}$ lub $x = -\sqrt{3}$

Odp. Rozwiązaniem równania są liczby $\sqrt{3}$ lub $(-\sqrt{3})$.

e) $4x^2 - 3 = 0$ tego rodzaju równanie można rozwiązać bez stosowania wzoru skróconego mnożenia zwłaszcza, gdy trudniej go rozpiszać.

$4x^2 - 3 = 0$ wiadomą (-3) przenosisz na prawą stronę;

$4x^2 = 3$ $/: 4$ pozbywasz się 4 przy x^2 ;

$x^2 = \frac{3}{4}$ $/ \sqrt{\quad}$ obie strony pierwiastkujesz;

$x = \sqrt{\frac{3}{4}}$ ale pamiętaj (!), że są 2 rozwiązania: dodatnie i ujemne;

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Odp. Rozwiązaniem równania są liczby $\frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

f) $x^2 + 9 = 0$

W tym równaniu jest dodawanie, ale **nie istnieje** wzór na sumę kwadratów, czyli $a^2 + b^2$.

Przeniesiesz **9** na drugą stronę równania i zobaczysz, co to da:

$x^2 = -9$ to fałsz, bo każda liczba podniesiona do kwadratu daje zawsze wynik dodatni lub zerowy; tu masz ujemny, więc równanie nie ma rozwiązania.

Odp. Rozwiązaniem równania jest zbiór pusty, $x \in \emptyset$.

Komentarz. Możesz równanie f) rozwiązać przy pomocy delty i wtedy przekonasz się, że też nie ma rozwiązania. Delta wyjdzie Ci ujemna, a pierwiastka kwadratowego z ujemnej liczby nie ma, to brak także x_1 i x_2 .

Przykład. Gdy masz niepełne równanie np. $3x^2 = 0$, to rozwiązujesz je w łatwy sposób.

Dzielisz obie strony przez 3 i masz $x^2 = 0$, a potem pierwiastkujesz, otrzymujesz $x = 0$ i to jest rozwiązanie równania.

Praca domowa:

1. Rozwiąż równania:

a) $3x^2 = 16 - 2x$ b) $4(x^2 + 3) = 16x$ c) $5x^2 + 2x = -3$

2. Rozwiąż równania stosując wzór skróconego mnożenia:

a) $x^2 - 49 = 0$ c) $x^2 - 16 = 0$ e) $x^2 - 7 = 0$

b) $x^2 - 1 = 0$ d) $x^2 - 81 = 0$ f) $2x^2 - 8 = 0$

3. Rozwiąż równania wyłączając x przed nawias:

a) $2x^2 + 6x = 0$ c) $3x^2 + 2x = 0$

b) $6x - x^2 = 0$ d) $10x^2 = 2x$

Odpowiedzi:

1. a) $(-2\frac{2}{3})$ lub 2 b) 1 lub 3 c) $\Delta < 0$, brak x_1 i x_2 .
 2. a) 7 lub (-7) c) 4 lub (-4) e) $\sqrt{7}$ lub $(-\sqrt{7})$
 b) 1 lub (-1) d) 9 lub (-9) f) 2 lub (-2)
 3. a) 0 lub (-3) b) 0 lub 6 c) 0 lub $(-\frac{2}{3})$ d) 0 lub $\frac{1}{5}$

RÓWNANIA ILOCZYNOWE

Są to równania zapisane jako iloczyn nawiasów przyrównany do zera.

Przykłady.

a) $(2x - 4)(3x + 9) = 0$

Skoro wynik jest zerowy, to jeden z czynników: $(2x - 4)$ lub $(3x + 9)$ jest zerem. Na tej podstawie każdy z nawiasów można przyrównać do zera, tak jak to robiliśmy wcześniej:

$(2x - 4)(3x + 9) = 0$ rozdzielasz iloczyn na dwa równania;

$2x - 4 = 0$ lub $3x + 9 = 0$ z każdego równania obliczasz x ;

$2x = 4$ $/: 2$ $3x = -9$ $/: 3$

$x = 2$ lub $x = -3$

Odp. Pierwiastkami równania są liczby: 2 lub (-3) .

b) $(x + 3)^2 = 0$ wykładnik 2 nie jest zerem, to zerem jest $(x + 3)$, więc chcąc wyliczyć x , należy nawias przyrównać do zera;

$(x + 3) = 0$

$x = -3$

Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba (-3) .

Praca domowa:

1. Rozwiąż równania iloczynowe przyrównując czynniki do zera:

a) $(x - 4)(x - 1) = 0$

c) $(4x - 1)(2x - 6) = 0$

b) $(x - 5)(x + 2) = 0$

d) $(3x - 2)(x + 8) = 0$

2. Rozwiąż równania pełne:

a) $2x^2 + 6x - 20 = 0$ b) $x^2 - 4x + 3 = 0$ c) $-x^2 + 5x = 2$

Odpowiedzi:

1. a) 4 lub 1 b) 5 lub (-2) c) $\frac{1}{4}$ lub 3 d) $\frac{2}{3}$ lub (-8)

2. a) (-5) lub 2 b) 1 lub 3 c) $\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ lub $\frac{5-\sqrt{17}}{2}$

RÓWNANIA DWUKWADRATOWE

Równania dwukwadratowe rozwiązujesz w oparciu o równania kwadratowe pełne.

Przykładowe równania dwukwadratowe:

- a) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ spójrz na wykładniki potęgi, jeden jest dwa razy
 b) $2x^6 - 7x^3 + 5 = 0$ większy od drugiego.
 c) $x - 6\sqrt{x} + 5 = 0$

Aby rozwiązać równanie dwukwadratowe, wprowadzasz w miejsce x z mniejszym wykładnikiem pomocniczą niewiadomą np. t . Dzięki temu powstanie znajome Ci równanie kwadratowe. Ono pomoże rozwiązać to trudniejsze równanie dwukwadratowe.

Przykład. Rozwiążemy równanie $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$.

Za x^2 podstawiasz t , zatem $x^2 = t$ i wtedy $x^4 = t^2$

Wstawiasz t do równania i masz już kwadratowe:

$$x^4 - 25x^2 + 144 = 0$$

$$t^2 - 25t + 144 = 0 \quad a = 1, b = -25, c = 144$$

Obliczasz deltę, pierwiastek z delty oraz t_1 i t_2 ;

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 144 = 625 - 576 = 49 \quad \sqrt{\Delta} = 7$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 - 7}{2} = \frac{18}{2} = 9 \quad \text{lub} \quad t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 + 7}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

Niewiadomą jest jednak x , dlatego powracasz do podstawienia:

$$x^2 = t$$

W miejsce t wstawiasz wyliczone liczby 9 i 16;

$$x^2 = 9 \quad \text{lub} \quad x^2 = 16 \quad \text{pierwiastkujesz oba równania;}$$

$$x^2 = 9 / \sqrt{\quad} \quad \text{lub} \quad x^2 = 16 / \sqrt{\quad}$$

$$x = \sqrt{9} \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{16}$$

$$x = 3 \quad \text{lub} \quad x = -3 \quad \text{lub} \quad x = 4 \quad \text{lub} \quad x = -4$$

Odp. Równanie dwukwadratowe $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ ma cztery rozwiązania: 3, -3, 4, -4.

Przykład. Rozwiążemy równanie $x - 6\sqrt{x} + 5 = 0$.

Dla czytelnego obrazu możesz je zapisać $x^1 - 6x^{\frac{1}{2}} + 5 = 0$.

Pomocnicze t wstawiasz za czynnik, który ma mniejszy wykładnik;

wtedy $\sqrt{x} = t$ i $x = t^2$

Otrzymasz równanie kwadratowe $t^2 - 6t + 5 = 0$.

$$\Delta_t = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 \quad \sqrt{\Delta_t} = 4$$

Obliczasz miejsca zerowe t_1 i t_2 ;

$$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{lub} \quad t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Aby obliczyć x , powracasz do podstawienia: $\sqrt{x} = t$

Za t wstawiasz wynik 1 oraz 5;

$$\sqrt{x} = 1 \quad \text{lub} \quad \sqrt{x} = 5 \quad \text{obie strony podnosisz do kwadratu;}$$

$$\sqrt{x} = 1 \quad /^2 \quad \sqrt{x} = 5 \quad /^2$$

$$x = 1 \quad \text{lub} \quad x = 25$$

Odp. Rozwiązaniem równania $x - 6\sqrt{x} + 5 = 0$ są liczby 1 lub 25.

NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE

Różnica między równaniem kwadratowym a nierównością jest taka, że w równaniu x_1 i x_2 to wyniki końcowe. W nierówności należy jeszcze narysować na osi parabolę, zaznaczyć na niej przedział spełniający warunek zadania i to on jest rozwiązaniem nierówności.

Nierówności kwadratowe, tak jak równania, mogą być **pełne** i **niepełne**.

1. W nierówności **pełnej**, tak samo jak w równaniu pełnym, współczynniki a, b, c , są różne od zera np. $2x^2 - 8x + 6 > 0$ i wtedy tradycyjnie obliczasz $\Delta, \sqrt{\Delta}, x_1$ i x_2 .

2. Nierówność **niepełna**, tak samo jak równanie niepełne, ma dwa składniki np. $x^2 - 3x \leq 0$ czy $x^2 - 4 > 0$ lub jeden $5x^2 < 0$ i stosujesz te same sposoby, co dla niepełnych równań kwadratowych. A więc wyłączasz x przed nawias, a gdy masz różnicę, to rozpisujesz nierówność według wzoru: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

NIERÓWNOŚCI PEŁNE

Przykład. Rozwiążemy nierówność $-x^2 + 6x \leq 5$.

Wszystkie składniki, tak jak w równaniu kwadratowym, muszą być z lewej strony, a z prawej zero. Przenosisz liczbę 5 na lewą stronę z przeciwnym znakiem i masz teraz:

$$-x^2 + 6x - 5 \leq 0 \quad a = -1, \quad b = 6, \quad c = -5$$

Obliczasz $\Delta, \sqrt{\Delta}, x_1, x_2$;

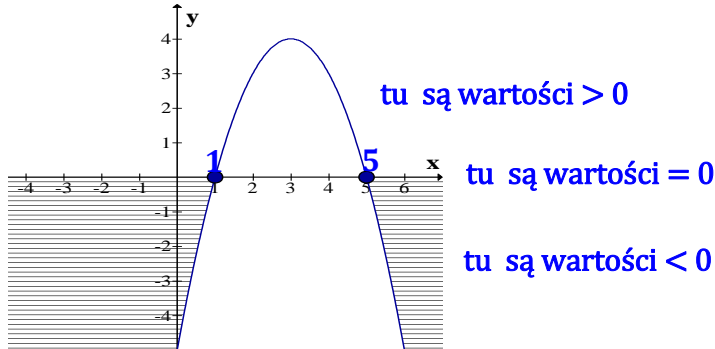
$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 \quad \sqrt{\Delta} = 4$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-4}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5 \quad \text{lub} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Miejsca zerowe 5 i 1 zaznaczasz na osi X .

Współczynnik a jest ujemny (-1) , to parabolę rysujesz ramionami w dół.

W nierówności masz zwrot ≤ 0 , to interesują Cię wartości **na osi X** i **pod osią X** .



Zapisujesz rozwiązanie: $x \in (-\infty; 1) \cup (5; \infty)$.

Komentarz. Oś Y nie ma wpływu na wynik; możesz Y pomijać i rysować parabolę bez tej osi. Nad osią X zawsze są wartości dodatnie, pod X są wartości ujemne, a na osi X są wartości zerowe, czyli miejsca zerowe. Tak więc oś Y będziemy pomijać w kolejnych zadaniach.

Przykład. Rozwiążemy nierówność $(x - 4)^2 < 5x + 4$.

Najpierw wyliczasz działanie $(x - 4)^2$ stosując wzór skróconego mnożenia $(a - b)^2$. Możesz też rozpisać na $(x - 4)(x - 4)$ i pomnożyć nawias przez nawias.

Otrzymasz:

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 < 5x + 4 \quad \text{obliczasz działania;}$$

$$x^2 - 8x + 16 < 5x + 4 \quad \text{przenosisz składniki na lewą stronę;}$$

$$x^2 - 13x + 12 < 0 \quad \text{tradycyjnie obliczasz } \Delta, \sqrt{\Delta}, x_1, x_2.$$

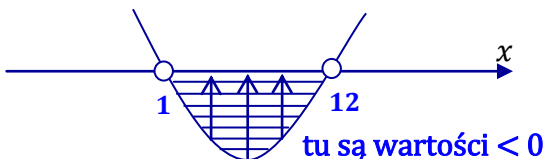
$$a = 1, \quad b = -13, \quad c = 12$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 169 - 48 = 121 \quad \sqrt{\Delta} = 11$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13 - 11}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{lub} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13 + 11}{2 \cdot 1} = \frac{24}{2} = 12$$

Zaznaczasz na osi oba miejsca zerowe. Współczynnik a jest dodatni, więc parabola kieruje się ramionami w górę.

Znak mniejszości w nierówności $x^2 - 13x + 12 < 0$ oznacza, że należy wziąć pod uwagę tylko część paraboli **pod osią**:



Rozwiązanie: $x \in (1; 12)$.

Przykład. Rozwiążemy nierówność $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$.

Nierówność jest już uporządkowana i z prawej strony ma zero.

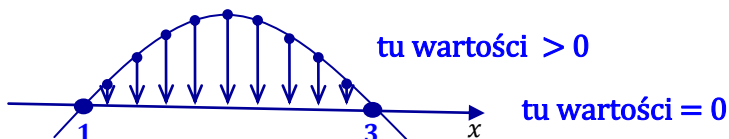
Wypisujesz współczynniki a, b, c , obliczasz $\Delta, \sqrt{\Delta}, x_1$ i x_2 .

$$a = -1, b = 4, c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 16 - 12 = 4 \quad \sqrt{\Delta} = 2$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 2}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad \text{lub} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 2}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Miejsca zerowe x_1 i x_2 zaznaczasz na osi i rysujesz parabolę skierowaną ramionami w dół. Zwrot nierówności ≥ 0 mówi, że należy zaznaczyć wartości dodatnie i zerowe, czyli **nad osią** i **na osi**:



Zapisujesz rozwiązanie: $x \in \langle 1; 3 \rangle$.

NIERÓWNOŚCI NIEPEŁNE

Tak jak w równaniu kwadratowym niepełnym są te same 2 sposoby.

1. Sposób – wyłączanie x przed nawias.

Rozwiążemy nierówność $x^2 - 5x > 0$.

Oba składniki zawierają x , więc można x wyłączyć przed nawias:

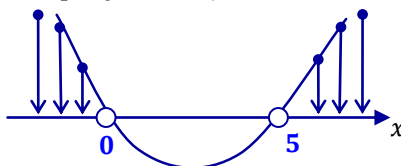
$$x^2 - 5x > 0$$

$x \cdot (x - 5) > 0$ każdy czynnik przyrównujesz do zera;

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

Zaznaczasz 0 i 5 na osi.



Zwrot jest > 0 , to interesują Cię wartości **nad osią**.

Zapisujesz rozwiązanie nierówności: $x \in (-\infty; 0) \cup (5; \infty)$.

2. Sposób – stosowanie wzoru skróconego mnożenia.

Rozwiążemy $x^2 - 9 \leq 0$. Stosujesz wzór $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Zatem masz $(x - 3)(x + 3) \leq 0$

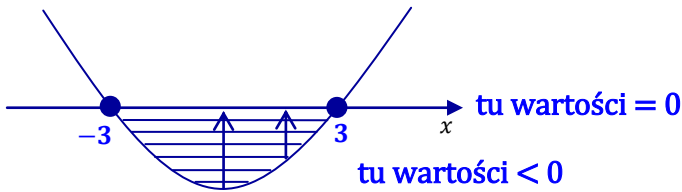
Przyrównujesz każdy nawias do zera;

$x - 3 = 0$ lub $x + 3 = 0$ z każdego równania wyliczasz x ;

$$x = 3 \quad \text{lub} \quad x = -3$$

Zaznaczasz te liczby na osi. Parabola ma ramiona skierowane do góry, bo współczynnik a przy x^2 jest dodatni.

W nierówności masz zwrot ≤ 0 , to interesują Cię wartości ujemne i zerowe, a więc **pod osią X** oraz **na osi X** .



Rozwiązanie nierówności: $x \in (-3; 3)$.

Komentarz. Analogicznie rozwiążesz $x^2 - 4 \leq 0$ czy $x^2 > 25$.

Pamiętaj, wszystkie składniki mają być po lewej stronie, a po prawej zero. Zwracaj też uwagę na to, jak są skierowane ramiona paraboli oraz na które wartości wskazuje Ci zwrot w nierówności.

Wskazówka.

Nierówność $x^2 - 2 \leq 0$ rozpiszesz $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \leq 0$.

Przykład. Przeanalizujemy nierówność, która nie ma miejsc zerowych.

Rozwiążemy $x^2 + 4 > 0$.

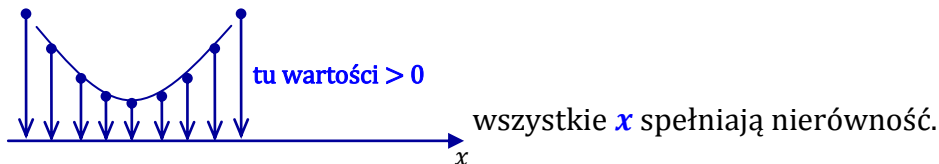
Na wzór skróconego mnożenia nie można rozpisać tego wyrażenia.

A gdyby policzyć Δ , to wyjdzie ujemna. Kiedy $\Delta < 0$, to brak x_1 i x_2 .

Ale każda parabola istnieje i da się wyznaczyć przedział, który jest rozwiązaniem tej nierówności, chociaż nie ma miejsc zerowych.

Parabola $x^2 + 4$ jest skierowana w górę i nie przecina osi X .

Zwrot ma > 0 , to szukasz wartości **nad osią X** ;



Rozwiązanie: $x \in (-\infty; \infty)$ lub krótko $x \in R$.

ZAD. 44. Rozwiąż nierówność $-x^2 - 9 > 0$.

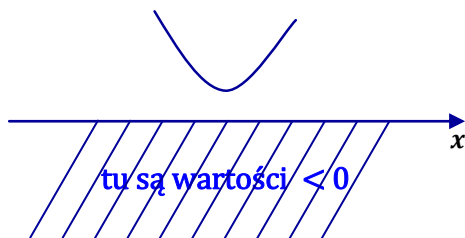
Ⓡ Nie można zastosować wzoru skróconego mnożenia. Wprawdzie jest w środku minus, ale na początku również. Nawet, gdy pomnożysz obie strony przez (-1) , niewiele Ci to da. Spójrz:

$$-x^2 - 9 > 0 \quad / \cdot (-1)$$

$x^2 + 9 < 0$ rozpisać tej sumy się nie da; delta też wyjdzie ujemna, to nie ma x_1 i x_2 ; jednak parabola istnieje zawsze.

Rysujesz ją ramionami w górę, bo współczynnik a przy x^2 jest dodatni.

Nierówność ma zwrot < 0 , to interesują Cię **wartości pod osią X** :



Nie ma punktów paraboli pod osią.

Rozwiązaniem nierówności jest zbiór pusty, $x \in \emptyset$.

Komentarz. W obu powyższych nierównościach nie było miejsc zerowych, a i tak w pierwszym przypadku rozwiązaniem były wszystkie liczby rzeczywiste, a w drugim zbiór pusty. Dlatego nie mając miejsc zerowych nie podejmuj od razu pochopnej decyzji, czy jest rozwiązanie czy nie. Bo dopiero umieszczenie paraboli na osi wskaże Ci prawidłową odpowiedź.

ZAD. 45. Rozwiąż nierówność $6x \geq x^2$.

® Przenosisz x^2 na lewą stronę. Po prawej zawsze musi być zero.

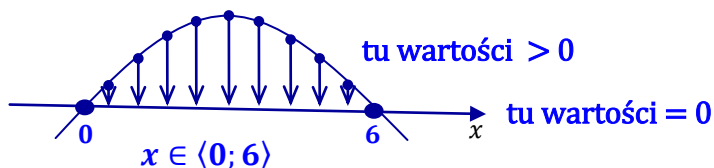
$6x - x^2 \geq 0$ wyłączasz x przed nawias;

$x \cdot (6 - x) \geq 0$ rozpisujesz na dwa oddzielne równania;

$x = 0$ lub $6 - x = 0$ obliczasz x ;

$$-x = -6 \text{ to } x = 6$$

Zaznaczasz oba miejsca zerowe na osi, parabola jest w dół, bo masz $(-x^2)$. W nierówności jest zwrot ≥ 0 , to interesują Cię wartości **nad osią** i **na osi**. Zakreskujesz ten obszar:



ZAD. 46. Rozwiąż nierówność $3x \leq x^2$.

® Przenosisz x^2 na lewą stronę i masz $3x - x^2 \leq 0$.

Z obu składników wyłączasz x przed nawias;

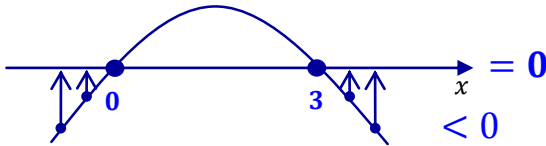
$x \cdot (3 - x) \leq 0$ rozpisujesz ten iloczyn na dwa oddzielne równania;

$x = 0$ lub $3 - x = 0$

$$-x = -3 \quad /:(-1)$$

$x = 3$ masz dwa miejsca zerowe: **0** oraz **3**.

Zaznaczasz obie liczby na osi. Parabola idzie w dół, bo masz $(-x^2)$. W nierówności jest zwrot ≤ 0 , to szukasz **wartości pod osią** i **na osi**.



$$x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty).$$

Przykłady. Dla zbadania, jak odmienne są wyniki w podobnych do siebie nierównościach, rozwiążemy jeszcze takie:

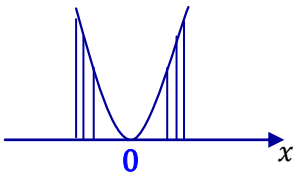
a) $3x^2 > 0$ b) $3x^2 \geq 0$ c) $3x^2 < 0$ d) $3x^2 \leq 0$

a) $3x^2 > 0$ najprościej potraktować tę nierówność jak równanie, bo i tak miejsce zerowe jest to samo:

$$3x^2 = 0 \quad /: 3 \quad \text{pozbywasz się liczby 3;}$$

$$x^2 = 0 \quad / \sqrt{\quad} \quad \text{więc } x = 0 \text{ jest jedno miejsce zerowe.}$$

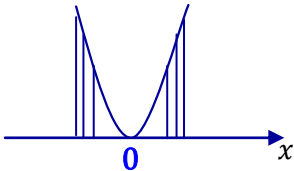
Rysujesz parabolę ramionami w górę z jednym miejscem zerowym:



Zwrot nierówności jest > 0 , to potrzebne są wartości tylko **nad osią**, zatem:
 $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty).$

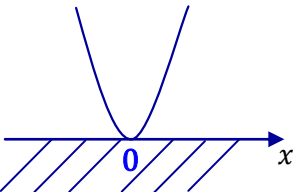
b) $3x^2 \geq 0$ nadal masz to samo miejsce zerowe $x = 0$.

Rysujesz parabolę w górę z jednym miejscem zerowym:



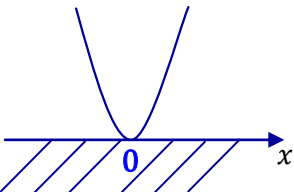
Zwrot nierówności ≥ 0 podpowiada wartości **nad osią** oraz **na osi**, to:
 $x \in (-\infty; \infty)$ lub krócej $x \in \mathbf{R}$.

c) $3x^2 < 0$ nadal masz to samo miejsce zerowe $x = 0$.



Zwrot nierówności < 0 wskazuje na wartości **pod osią**, a takich nie ma, więc:
 $x \in \emptyset$

d) $3x^2 \leq 0$



Zwrot nierówności ≤ 0 podpowiada wartości **na osi** i **pod osią**, więc tylko:
 $x = 0$

Komentarz. Jak widzisz, powyżej rozwiązaliśmy nierówności, które różniły się tylko zwrotem i otrzymaliśmy cztery, różne odpowiedzi.

Niech Cię w nierównościach kwadratowych prowadzą te dwa, najważniejsze drogowskazy:

1. Współczynnik a jest bardzo ważny, bo od niego zależy, jak narysujesz ramiona paraboli: w górę czy w dół.

2. Zwrot w nierówności jest bardzo ważny, on podpowiada Ci, czy masz zapisać do rozwiązania liczby znajdujące się: nad osią, na osi, pod osią, czy nad i na osi, czy pod i na osi.

Praca domowa:

1. Rozwiąż nierówności pełne:

a) $x^2 + 9x - 10 > 0$ d) $-x^2 + 8x - 12 \leq 0$

b) $x^2 + 3x - 4 \geq 0$ e) $-x^2 + x + 6 \geq 0$

c) $x^2 + 2x - 8 < 0$ f) $-x^2 + 2x + 8 < 0$

2. Rozwiąż nierówności niepełne:

a) $x^2 - 25 < 0$ d) $x^2 - 1 > 0$

b) $x^2 - 36 \leq 0$ e) $x^2 - 49 \geq 0$

c) $x^2 + 9 \leq 0$ f) $x^2 + 1 > 0$

3. Rozwiąż nierówności niepełne wyłączając x przed nawias:

a) $x^2 - 8x > 0$ b) $x^2 + 7x \geq 0$ c) $x^2 + \frac{1}{2}x < 0$ d) $-2x^2 \leq 0$

Odpowiedzi:

1. a) $x \in (-\infty; -10) \cup (1; \infty)$ d) $x \in (-\infty; 2) \cup (6; \infty)$

b) $x \in (-\infty; -4) \cup (1; \infty)$ e) $x \in (-2; 3)$

c) $x \in (-4; 2)$ f) $x \in (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$

2. a) $x \in (-5; 5)$ d) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

b) $x \in (-6; 6)$ e) $x \in (-\infty; -7) \cup (7; \infty)$

c) $x \in \emptyset$ f) $x \in (-\infty; +\infty)$ lub krócej $x \in R$

3. a) $x \in (-\infty; 0) \cup (8; \infty)$ c) $x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

b) $x \in (-\infty; -7) \cup (0; \infty)$ d) $x \in R$

FUNKCJA KWADRATOWA – ZADANIA TEKSTOWE

Przykład. Wyznacz wzór paraboli, której wierzchołkiem jest punkt $(-4; 1)$ i przechodzi ona przez punkt $(-3; 0)$.

Podpowiedź, jak rozpocząć to zadanie, jest w informacji o wierzchołku. Wierzchołek masz zapisany we wzorze kanonicznym, więc zaczniesz od postaci kanonicznej.

$y = a(x - p)^2 + q$ wstawiasz p i q wierzchołka, $p = -4, q = 1$;

$y = a(x + 4)^2 + 1$ brakuje Ci jeszcze współczynnika a ;

Wiemy z treści zadania, że ta parabola przechodzi przez punkt $(-3; 0)$. Jeśli jego współrzędne wstawisz za x i y do powyższego zapisu, to zobacz, co się okaże:

$$0 = a \cdot (-3 + 4)^2 + 1 \quad \text{obliczasz działania;}$$

$$0 = a \cdot (1)^2 + 1 \quad \text{dążysz do wyliczenia współczynnika } a;$$

$$0 = 1a + 1$$

$$0 - 1 = 1a \quad \text{to } a = -1$$

Gdy wstawisz $a = -1$ do $y = a(x + 4)^2 + 1$ masz już kompletny wzór kanoniczny: $y = a(x + 4)^2 + 1$

$$y = -1(x + 4)^2 + 1 \quad \text{gotowy wzór paraboli.}$$

Komentarz.

Gdyby w treści zadania było polecenie zapisania paraboli w postaci np. ogólnej, to wyliczysz działania w tej kanonicznej i już masz ogólną. Dla postaci iloczynowej skorzystasz z wzoru iloczynowego.

ZAD. 47. Napisz wzór funkcji kwadratowej wiedząc, że jej miejscami zerowymi są liczby 2 i 3, a parabola przechodzi przez punkt $P = (7; 1)$.

® Skoro są dane miejsca zerowe, to zastosuj wzór na postać iloczynową, w której występują x_1 i x_2 :

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Podstawisz do tego wzoru $x_1 = 2, x_2 = 3$ oraz współrzędne punktu $P = (7; 1)$ czyli $x = 7, y = 1$.

Otrzymasz: $1 = a(7 - 2)(7 - 3)$ obliczasz współczynnik a ;

$$1 = a \cdot 5 \cdot 4$$

$$1 = 20a \quad \text{zamienisz strony prawą z lewą;}$$

$$20a = 1 \quad /: 20 \quad \text{to } a = \frac{1}{20}$$

Wstawiasz a do wzoru iloczynowego i otrzymasz jego pełny zapis:

$$y = \frac{1}{20}(x - 2)(x - 3)$$

Odp. Funkcja kwadratowa ma wzór $y = \frac{1}{20}(x - 2)(x - 3)$.

ZAD. 48. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej wiedząc, że jej wykres przechodzi przez punkty: $A = (0; 3)$, $B = (1; 5)$, $C = (2; 9)$.

Ⓜ Każdy z tych trzech punktów leży na paraboli, więc należy jego współrzędne $(x; y)$ wstawić do wzoru ogólnego $y = ax^2 + bx + c$.

Dla $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ otrzymasz $3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$, to $\underline{3 = c}$

Dla $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ otrzymasz $5 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$, to $\underline{5 = a + b + c}$

Dla $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ otrzymasz $9 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$, to $\underline{9 = 4a + 2b + c}$

Te trzy równania spinasz klamrą i rozwiązujesz układ równań:

$$\begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 5 & \text{liczbę } 3 \text{ wstawiasz za } c \text{ do II i III równania;} \\ 4a + 2b + c = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 3 \\ a + b + 3 = 5 \\ 4a + 2b + 3 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + 2b = 6 \end{cases} \text{ rozwiązujesz układ 2 równań; czeka } c = 3$$

Po rozwiązaniu masz: $a = 1, b = 1, c = 3$, które wstawiasz do wzoru:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{zatem } y = 1x^2 + 1x + 3 \text{ czyli } y = x^2 + x + 3$$

Odp. Funkcja kwadratowa ma wzór $y = x^2 + x + 3$.

ZAD. 49. Oblicz największą i najmniejszą wartość funkcji o wzorze $f(x) = -x^2 - 5x + 2$ w przedziale $x \in \langle -4; 3 \rangle$.

Ⓜ To zadanie jest prawie zawsze na sprawdzianie.

Należy podstawić obie liczby z danego przedziału do wzoru funkcji.

$$\text{Dla } x = -4 \quad f(-4) = -(-4)^2 - 5 \cdot (-4) + 2 = -16 + 20 + 2 = 6$$

$$\text{Dla } x = 3 \quad f(3) = -(3)^2 - 5 \cdot 3 + 2 = -9 - 15 + 2 = -22$$

Z obu wyników mniejszy jest (-22) , a większy 6 .

Ale to nie koniec zadania. Należy jeszcze sprawdzić, czy w podanym przedziale $\langle -4; 3 \rangle$ znajduje się wierzchołek paraboli. Jeśli jest, wtedy jego q przebije liczbę (-22) lub 6 , bo to w wierzchołku zawsze jest wartość najmniejsza lub największa.

Obliczasz p i dowiesz się, czy jest on w przedziale $\langle -4; 3 \rangle$.

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2 \cdot (-1)} = \frac{5}{-2} = -2\frac{1}{2} \text{ ta liczba jest w przedziale } \langle -4; 3 \rangle.$$

Podstawiasz $p = -2\frac{1}{2}$ do funkcji $f(x) = -x^2 - 5x + 2$.

$$f\left(-2\frac{1}{2}\right) = -\left(-2\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(-2\frac{1}{2}\right) + 2 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} + 2 = 8\frac{1}{4}$$

Z otrzymanych trzech wyników wybierzesz największy i najmniejszy:

dla $x = -4$ $f(-4) = 6$

dla $x = 3$ $f(1) = -22$ to jest wartość **najmniejsza**.

dla $x = -2\frac{1}{2}$ $f(-2\frac{1}{2}) = 8\frac{1}{4}$ to jest wartość **największa**.

Odp. Wartością największą funkcji w przedziale $\langle -4; 3 \rangle$ jest liczba $8\frac{1}{4}$, a wartością najmniejszą (-22) .

Komentarz.

Jeśli w podobnej treści zadaniu obliczysz p wierzchołka paraboli i on nie należy do podanego przedziału, wtedy pomijasz obliczanie $f(p)$. Wybierzesz wartość największą i najmniejszą tylko z dwóch wyników, otrzymanych po wstawieniu do wzoru funkcji obu brzegowych liczb z podanego przedziału. Wprawdzie to w wierzchołku jest wartość największa lub najmniejsza, ale gdy znajduje się on poza podanym przedziałem, to nas w ogóle nie interesuje.

Praca domowa:

1. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej wiedząc, że miejscami zerowymi są liczby 1 i 2, a jej wykres przechodzi przez punkt $P = (4; 12)$.

2. Do wykresu $y = x^2 + 4x + c$ należy punkt $P = (2; 5)$. Oblicz c .

3. Oblicz największą i najmniejszą wartość dla funkcji $y = x^2 - 2x + 5$ w przedziale $x \in \langle -3; 6 \rangle$.

4. Zamień postać ogólną na iloczynową:

a) $y = x^2 + 7x - 8$ b) $y = 3x^2 + 2x - 16$

5. Zamień postać kanoniczną na ogólną:

a) $y = 2(x + 4)^2 - 3$ b) $y = -2(x - 5)^2 + 6$

Odpowiedzi:

1. $f(x) = 2(x - 1)(x - 2)$

2. $c = -7$

3. Największa 29, najmniejsza 4.

4. a) $y = (x + 8)(x - 1)$ b) $y = 3\left(x + 2\frac{2}{3}\right)(x - 2)$

5. a) $y = 2x^2 + 16x - 29$ b) $y = -2x^2 + 20x - 44$

***PARAMETR W FUNKCJI KWADRATOWEJ**

Napiszę Ci zestaw wszystkich założeń i przećwiczmy je w zadaniach. Inne założenia układasz dla równań, a inne dla nierówności.

***ZAŁOŻENIA DO RÓWNAŃ Z PARAMETREM**

Równanie z parametrem to np. $(m - 1)x^2 + (m + 7)x - m - 3 = 0$.

Obliczenia wykonujesz na współczynnikach a, b, c .

W powyższym przykładzie masz:

$$a = m - 1, \quad b = m + 7, \quad c = -m - 3$$

Założenia do równań dotyczą pierwiastków (miejsc zerowych) x_1 i x_2 .

1. Rozpoczynasz od założenia $a \neq 0$. To jest warunek konieczny, aby funkcja była kwadratowa. Pomijasz to założenie, gdy w miejscu współczynnika a nie ma parametru np. $2x^2 + 3x + m = 0$.

2. Jeśli jest pytanie o **liczbę pierwiastków (miejsc zerowych)**, to wybierzesz jedno z tych założeń:

- a) **dwa różne** pierwiastki, to $\Delta > 0$ c) **jeden** pierwiastek, to $\Delta = 0$
 b) **dwa** pierwiastki, to $\Delta \geq 0$ d) **brak** pierwiastków, to $\Delta < 0$

3. Jeśli masz zbadać, jakich znaków są pierwiastki (miejsca zerowe), to skorzystasz z wzorów Viete'a: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

a) pierwiastki x_1 i x_2 są **dodatnie** (+;+), gdy:

$$x_1 + x_2 > 0 \quad \text{i} \quad x_1 \cdot x_2 > 0 \quad \text{czyli suma i iloczyn są dodatnie;}$$

b) pierwiastki są **ujemne** (-;-), gdy:

$$x_1 + x_2 < 0 \quad \text{i} \quad x_1 \cdot x_2 > 0 \quad \text{suma jest ujemna, a iloczyn dodatni;}$$

c) pierwiastki są **jednakowych** znaków: (-;-) lub (+;+) gdy:

$$x_1 \cdot x_2 > 0 \quad \text{wystarczy, że iloczyn dodatni, to tylko ten warunek;}$$

d) pierwiastki są **różnych** znaków: (+;-) gdy:

$$x_1 \cdot x_2 < 0 \quad \text{tylko ten warunek i wtedy zawsze } \Delta > 0.$$

Obliczasz parametr z konkretnych założeń, cząstkowe wyniki dasz na oś liczbową, zaznaczasz przedziały i podajesz ich wspólną część.

Przykład. Dla jakiej wartości parametru m , równanie:

$$(m - 5)x^2 + 2x + 3 = 0 \quad \text{ma dwa, różne pierwiastki.}$$

Założenia:

- 1.** $a \neq 0$ wtedy równanie na pewno jest kwadratowe;
2. $\Delta > 0$ wtedy równanie ma dwa, różne pierwiastki x_1 i x_2 .

Wypisujesz współczynniki a, b, c . Obliczasz osobno każde założenie.

Ad.1. $a \neq 0$

$$m - 5 \neq 0 \quad m \neq 5$$

współczynniki:

$$a = m - 5 \quad b = 2 \quad c = 3$$

Wykluczasz liczbę 5.

Ad. 2. $\Delta > 0$

Obliczasz deltę wstawiając współczynniki a, b, c ;

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (m - 5) \cdot 3 = 4 - 12 \cdot (m - 5) = 4 - 12m + 60$$

$$\Delta = -12m + 64$$

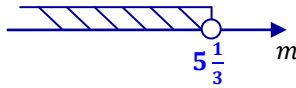
$\Delta > 0$ delta jest większa od zera, gdy:

$$-12m + 64 > 0 \quad \text{obliczamy } m;$$

$$-12m > -64 \quad /: (-12)$$

$$m < \frac{-64}{-12}$$

$$m < 5\frac{1}{3}$$



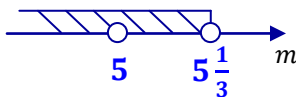
Równanie ma dwa, różne pierwiastki, gdy $m \in (-\infty; 5\frac{1}{3})$.

Podsumowanie.

Masz z obu założeń dwa wyniki:

$$1. m \neq 5 \quad \text{i} \quad 2. m \in (-\infty; 5\frac{1}{3})$$

Zaznaczasz je na osi m i zapisujesz przedział, który uwzględnia oba warunki:



$$m \in (-\infty; 5\frac{1}{3}) \setminus \{5\}$$

Odp. Równanie $(m - 5)x^2 + 2x + 3 = 0$ ma dwa, różne miejsca zerowe, gdy $m \in (-\infty; 5\frac{1}{3}) \setminus \{5\}$.

***ZAD. 50.** Dane jest równanie $(m - 2)x^2 - (m + 1)x - m = 0$.

Dla jakiej wartości parametru m , równanie ma 2 pierwiastki ujemne?

® Wypisujesz założenia:

1. $a \neq 0$ warunek, aby równanie było kwadratowe;

2. $\Delta \geq 0$ warunek na istnienie dwóch pierwiastków;

3. $x_1 + x_2 < 0$ i $x_1 \cdot x_2 > 0$ miejsca zerowe są ujemnych znaków.

Masz współczynniki: $a = m - 2$, $b = -(m + 1)$, $c = -m$.

Obliczasz każde złożenie osobno, a gdy masz gotowe do nich odpowiedzi, to dajesz je na oś i zapisujesz ich część wspólną.

Ad. 1. $a \neq 0$

$m - 2 \neq 0$ więc $m \neq 2$ wyklucasz liczbę 2.

Funkcja jest kwadratowa dla $m \neq 2$

Ad. 2. $\Delta \geq 0$. Wyliczasz deltę $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = [-(m + 1)]^2 - 4 \cdot (m - 2)(-m) = m^2 + 2m + 1 - 4(-m^2 + 2m)$$

$$\Delta = m^2 + 2m + 1 + 4m^2 - 8m = 5m^2 - 6m + 1$$

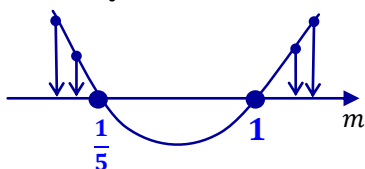
$\Delta \geq 0$ gdy $5m^2 - 6m + 1 \geq 0$ teraz obliczasz Δ_m

$$\Delta_m = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 16 \quad \sqrt{\Delta_m} = 4$$

Wyznaczasz miejsca zerowe m_1 i m_2 ;

$$m_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-4}{2 \cdot 5} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad \text{lub} \quad m_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+4}{2 \cdot 5} = \frac{10}{10} = 1$$

Zaznaczasz te liczby na osi i rysujesz parabolę. Szukasz wartości na osi i nad osią, bo założenie masz $\Delta \geq 0$;



$$\Delta \geq 0 \quad \text{gdy} \quad m \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right) \cup \langle 1; \infty \rangle$$

Równanie ma dwa pierwiastki dla $m \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right) \cup \langle 1; \infty \rangle$.

Ad. 3. $x_1 + x_2 < 0$ i $x_1 \cdot x_2 > 0$

$\frac{-b}{a} < 0$ i $\frac{c}{a} > 0$ wstawiasz współczynniki a, b, c ;

$\frac{m+1}{m-2} < 0$ i $\frac{-m}{m-2} > 0$ zamieniasz ilorazy na iloczyny;

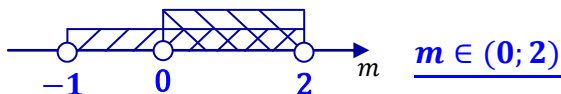
$$(m+1)(m-2) < 0 \quad \text{i} \quad (-m)(m-2) > 0$$

Każdy z nawiasów przyrównujesz do zera.

Po obliczeniu miejsc zerowych, rysujesz parabolę dla każdej z tych 2 nierówności i otrzymasz 2 przedziały:

$$m \in (-1; 2) \quad \text{i} \quad m \in (0; 2)$$

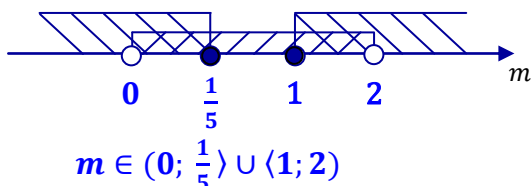
Zaznaczasz oba przedziały na jednej osi i zapisujesz część wspólną:



Pierwiastki równania mają ujemne znaki, gdy $m \in (0; 2)$.

Podsumowanie.

Cząstkowe odpowiedzi z tych założeń, czyli z Ad.1, Ad.2, Ad.3, wprowadzasz na jedną oś i zapisujesz ich wspólną część:



$$m \in \left(0; \frac{1}{5}\right) \cup \langle 1; 2 \rangle$$

Odp. Równanie ma dwa, ujemne pierwiastki, gdy $m \in \left(0; \frac{1}{5}\right) \cup \langle 1; 2 \rangle$.

*ZAŁOŻENIA DO NIERÓWNOŚCI Z PARAMETREM

Parametr w równaniu kwadratowym odnosił się do miejsc zerowych (pierwiastków), a w nierówności dotyczy **wartości**.

W zależności od zwrotu w nierówności wybierasz opcje:

1. Wartości dodatnie oblicza się, gdy nierówność ma zwrot > 0 .

Wtedy cała parabola jest nad osią, ramiona ma do góry i nie ma miejsc zerowych. Masz wtedy założenia: $a > 0$ i $\Delta < 0$.

2. Wartości ujemne oblicza się, gdy nierówność ma zwrot < 0 .

Wtedy cała parabola jest pod osią, ramiona ma w dół i nie ma miejsc zerowych. Masz wtedy założenia: $a < 0$ i $\Delta < 0$.

3. Wartości niedodatnie oblicza się, gdy nierówność ma zwrot ≤ 0 .

Wtedy parabola jest pod osią lub może mieć wierzchołek na osi.

Masz wtedy założenia: $a < 0$ i $\Delta \leq 0$.

4. Wartości nieujemne oblicza się, gdy nierówność ma zwrot ≥ 0 .

Cała parabola jest nad osią, ramiona ma w górę lub ma wierzchołek na osi. Zatem nie ma miejsc zerowych lub jest jedno miejsce zerowe.

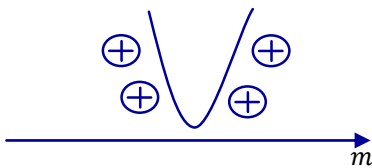
Masz wtedy założenia: $a > 0$ i $\Delta \leq 0$.

Po wykonaniu obliczeń do każdego założenia, zaznaczasz wyniki na jednej osi i podajesz wspólną część.

Przykład. Dla jakiej wartości parametru m , spełniona jest nierówność:

$$(m - 4)x^2 + 3x + m > 0$$

Skoro jest zwrot > 0 , to chodzi o wartości dodatnie. Cała parabola **musi być nad osią**.



Założenia:

1. $a > 0$ ramiona paraboli w górę,

2. $\Delta < 0$ brak miejsc zerowych.

Współczynniki: $a = m - 4$, $b = 3$, $c = m$.

Ad. 1. $a > 0$ podstawiasz współczynnik $a = m - 4$;

$m - 4 > 0$ zatem $m > 4$ masz już pierwszą odpowiedź;

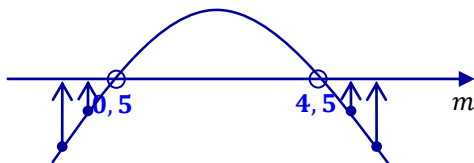
Ad. 2. $\Delta < 0$ obliczasz $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (m - 4) \cdot m = 9 - 4m \cdot (m - 4) = \underline{\underline{-4m^2 + 16m + 9}}$$

$\Delta < 0$ gdy $-4m^2 + 16m + 9 < 0$

$$\Delta_m = 400 \quad \sqrt{\Delta_m} = 20 \quad \text{to } m_1 = 4,5 \text{ lub } m_2 = 0,5$$

Zaznaczasz na osi oba miejsca zerowe, rysujesz parabolę w dół, bo masz $(-4m^2)$. Masz $\Delta < 0$, to interesują Cię wartości ujemne, czyli **pod osią**;



$\Delta < 0$ gdy $m \in (-\infty; 0,5) \cup (4,5; \infty)$

Podsumowanie.

Masz 2 cząstkowe odpowiedzi.

1. $m > 4$

2. $m \in (-\infty; 0,5) \cup (4,5; \infty)$

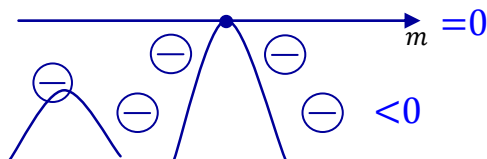
Zaznaczasz oba te zbiory na jednej osi. Wspólna część to $(4,5; \infty)$.

Odp. Nierówność $(m-4)x^2 + 3x + m > 0$ jest spełniona dla każdego x , gdy parametr m należy do przedziału $(4,5; \infty)$.

Przykład. Rozwiążemy nierówność $(m-4)x^2 + 3x + m \leq 0$.

Zwrot ≤ 0 wskazuje Ci na **wartości ujemne lub równe zero**.

Parabola z ramionami w dół musi być pod osią lub mieć jedno miejsce zerowe na osi:



Założenia:

1. $a < 0$ ramiona w dół
2. $\Delta \leq 0$ jedno miejsce zerowe lub brak miejsca zerowego.

Obliczasz każde założenie i obie cząstkowe odpowiedzi zaznaczasz na jednej osi. Rozwiązaniem jest wspólna część obu przedziałów.

Komentarz.

Gdy zadanie z parametrem nie jest zapisane w postaci równania lub nierówności, lecz odnosi się do funkcji np. $f(x) = x^2 + 2mx + m - 1$, to wczytaj się dobrze w treść. W niej jest zawsze podpowiedź, czy polecenie dotyczy:

- **liczby miejsc zerowych** (rozwiązań, pierwiastków) i wtedy stosujesz założenia do równań kwadratowych z parametrem;
- **wartości ujemnych lub dodatnich lub nieujemnych lub niedodatnich** i wtedy stosujesz założenia do nierówności kwadratowych z parametrem.